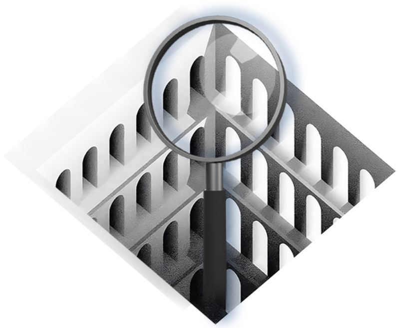
litnus.

GEOMETRI ANALITIK I

Dr. Muda Sakti Raja Sihite, M.Pd.
Lena Rosdiana Pangaribuan, S.Pd, M.Si.
Prof. Dr. Binur Panjaitan, M.Pd.



GEOMETRI ANALITIK I

Dr. Muda Sakti Raja Sihite, M.Pd.
Lena Rosdiana Pangaribuan, S.Pd, M.Si.
Prof. Dr. Binur Panjaitan, M.Pd.

Penerbit
litnus.

GEOMETRI ANALITIK I

Ditulis oleh :

Dr. Muda Sakti Raja Sihite, M.Pd.

Lena Rosdiana Pangaribuan, S.Pd., M.Si.

Prof. Dr. Binur Panjaitan, M.Pd.

Diterbitkan, dicetak, dan didistribusikan oleh
PT. Literasi Nusantara Abadi Grup
Perumahan Puncak Joyo Agung Residence Kav. B11 Merjosari
Kecamatan Lowokwaru Kota Malang 65144
Telp : +6285887254603, +6285841411519
Email: literasinusantaraofficial@gmail.com
Web: www.penerbitlitnus.co.id
Anggota IKAPI No. 340/JTI/2022

Cetakan I, Juni 2024

Perancang sampul: Noufal Fahriza
Penata letak: Noufal Fahriza

ISBN : 978-623-114-944-2
xii + 96 hlm. ; 15,5x23 cm.

KATA PENGANTAR

Perkembangan Matematika bukan saja ditandai dengan munculnya berbagai macam cabang Matematika, tetapi juga diikuit oleh penyusunan kembali landasan yang kokoh yang terus menerus dilakukan sehingga akar dari pohon matematika itu semakin kuat dan semakin dalam.

Geometri sebagai salah satu cabang dari matematika yang baru dikembangkan lebih dari 2000 tahun yang lalu yang merupakan suatu metoda untuk memecahkan persoalan-persoalan yang menyangkut titik, garis, bidang, jarak dan sudut dalam suatu bangun ruang.

Didalam buku ini masalah yang diabahas adalah seputar bangun ruang dan bangun datar dalam ruang dimensi tiga. Isi buku ini dimulai dari sejarah singkat geometri, uraian tentang sistem aksiomatik yang merupakan dasar untuk mempelajari geometri dan disertai dengan beberapa contoh serta soal-soal latihan.

Buku ini disusun dengan maksud agar para siswa dapat mempersiapkan diri untuk mengenal dan memahami dasar-dasar geometri untuk selanjutnya dapat mendalami ide-ide yang terkandung didalamnya serta dapat mengimplementasikannya ilmu geometri ini ke dunia kerja nantinya.

Harapan dari penyusun adalah agar kiranya para mahasiswa dapat mencapai tujuan perkuliahannya dengan menggunakan buku ini.

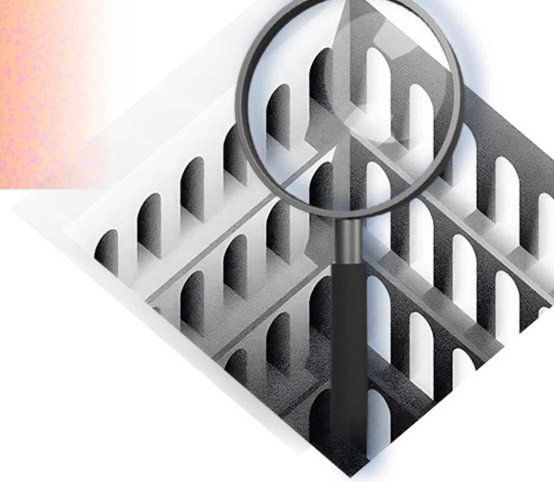
Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.
Terima Kasih.

Medan, Juni 2024

Tim Penyusun

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR



BAB I

Pendahuluan

A. Sejarah Singkat Geometri

Geometri seperti cabang ilmu matematika yang lain lahir berabad tahun silam dari kondisi real kehidupan sehari-hari sekelompok masyarakat. Misalnya lebih dari 2000 tahun silam orang Mesir mempunyai kebiasaan bekerja dengan dasar-dasar geometri, dikarenakan pertimbangan praktis seperti banjir berkala sungai Nil yang selalu menghanyutkan garis batas tanah milik mereka. Sehingga memaksa mereka untuk merekonstruksi garis-garis batas tanah tersebut.

Kata "geometri" berasal dari bahasa Yunani (Greek) yang berarti "ukuran bumi". Maksudnya mencakup mengukur segala sesuatu yang ada di bumi. Geometri kuno sebagian dimulai dari pengukuran praktis yang diperlukan untuk pertanian orang-orang Babylonia dan Mesir. Kemudian geometri orang Mesir dan Babylonia ini diperluas untuk perhitungan panjang ruas garis, luas dan volume.

Bangsa Yunani yang banyak dipengaruhi oleh daerah Mediterania memiliki sedikit pandangan lebih maju terhadap geometri. Geometri telah dianggap sebagai sebuah abstraksi dari dunia nyata atau sebuah model yang membantu pikiran atau logika. Sampai akhirnya pada tahun 250 sebelum masehi Euclide menghasilkan karya monumental yang dituangkan ke dalam buku Element, yang hingga sekarang karyanya masih dipelajari dan digunakan.

Secara umum buku materi ajar ini akan menjelaskan tentang dasar-dasar geometri seperti titik, garis, bidang, ruang, sudut, yang sebagian besar hasil buah pemikiran Euclide. Walaupun pada perkembangannya sekarang sudah banyak sentuhan para ahli geometri modern seperti David Hilbert dan G. D. Birkhoff.

David Hilbert (1862 – 1943), seorang matematikawan asal Jerman yang banyak membuat sumbangan besar pada bidang matematika. Tahun 1899, lewat bukunya *Graundlagen der Geometrie* (Fondasi Geometri) ia memberikan dasar yang lebih teliti pada aksioma geometri sama konsistennya dengan bilangan real dalam matematika. Hilbert menyusun dan memperbaharui geometri euclid dengan mengemukakan 28 asumsi tentang geometri titik, garis, dan bidang yang dikenal dengan aksioma Hilbert.

Pada perkembangannya terdapat beberapa penggolongan geometri, antara lain:

1. Berdasarkan lingkup atau bidang kajian, terdapat:
   - geometri bidang (dua dimensi)
   - geometri ruang (dimensi tiga)
   - geometri dimensi n
   - geometri bola
   - dan lain-lain
2. Berdasarkan bahasa yang digunakan, terdapat:
   - geometri analitik: geometri dengan bahasa aljabar
   - geometri umum: geometri dengan bahasa gambar
   - geometri diferensial: geometri dengan bahasa derivatif
   - dan lain-lain
3. Berdasarkan sistem aksioma, terdapat:
   - geometri Euclides
   - geometri non Euclides
   - Geometri Proyektif

B. Titik, Garis, Bidang, dan Ruang

Seperti halnya di dalam buku Element karya Euclide ada yang disebut dengan istilah primitive. Istilah primitif ditujukan untuk konsep-konsep sederhana yang mudah dipahami dan sulit dibuatkan batasannya. Yang kemudian oleh para akhli geometri modern konsep-konsep tersebut dikelompokkan ke dalam istilah-istilah yang tidak didefinisikan *(undefined)*. Dalam struktur geometri modern khususnya dan matematika pada umumnya terdapat istilah-istilah yang telah disepakati dan menjadi pedoman bagi semua orang yang mempelajari geometri, matematika, atau cabang matematika yang lain.

Istilah-istilah tersebut adalah: 1) unsur-unsur yang tidak didefinisikan,2) unsur-unsur yang didefinisikan, 3) aksioma/postulat, dan 4) teorema/dalil/rumus. Unsur yang tidak didefinisikan atau pengertian pangkal adalah konsep primitive yang mudah dipahami dan sulit dibuatkan definisinya, seperti titik, garis, dan bidang.

Apabila kita paksakan untuk membuat definisi untuk unsur primitif tersebut maka akan terjadi blunder. Misalnya kita akan membuat definisi untuk titik, seperti titik adalah sesuatu yang menempati tempat. Kemudian kita harus mendefiniskan lagi sesuatu yang menempati tempat itu apa, misalnya noktah yang ada pada bidang. Kemudian kita harus mendefinisikan tentang noktah itu apa, dan seterusnya. Sehingga dalam definisi terdapat definisi dan begitu seterusnya. Oleh karena itu semua konsep yang memiliki sifat demikian dimasukan ke dalam katagori unsur primitif atau unsur yang tidak terdefinisi.

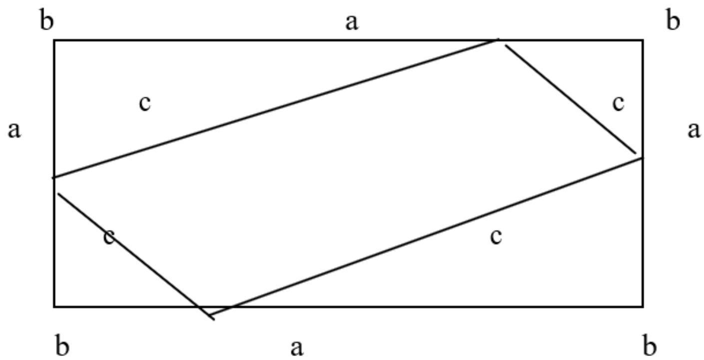
Unsur-unsur yang didefinisikan adalah konsep yang mempunyai definisi atau batasan. Sehingga dengan definisi konsep-konsep tersebut menjadi jelas, tidak ambigius atau tidak bermakna ganda. Syarat sebuah definisi adalah harus singkat, padat, jelas, dan tidak mengandung pengertian ganda. Unsur yang didefinisikan adalah konsep-konsep yang dikembangkan dari unsur yang tidak didefinisikan. Misalnya, sinar garis, ruas garis, segitiga, segiempat dikembangkan dari konsep garis sebagai unsur yang tidak didefinisikan.

Aksioma/postulat adalah anggapan dasar yang disepakati benar tanpa harus dibuktikan. Yang termasuk ke dalam aksioma/postulat adalah sesuatu atau konsep yang secara logika dapat diterima kebenaranya tanpa harus dibuktikan. Dalam geometri (Euclide) misalnya dikenal postulat garis sejajar yaitu apabila ada sebuah garis dan sebuah titik di luar garis tersebut, melalui titik itu dibuat garis lain yang sejajar garis pertama maka kedua garis tersebut tidak akan berpotongan.

Teorema/rumus/dalil adalah anggapan sementara yang harus dibuktikan kebenarannya melalui serangkaian pembuktian deduktif. Pembuktian teorema/rumus/dalil dalam matematika keberlakuannya harus secara umum, tidak berlaku hanya untuk beberapa kasus seperti contoh.

Misalnya teorema Pythagoras yang menyatakan bahwa dalam sebuah segitiga siku-siku berlaku "jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi miringnya". Apabila kita mengajukan pembuktian melalui menunjukkan/memberi contoh dalam segitiga siku-siku dengan panjang sisi masingmasing 3 dan 4 satuan panjang, serta panjang sisi miringnya sama dengan 5 satuan panjang (tripel Pythagoras), sehingga diperlihatkan hubungan $3^2 + 4^2 = 5^2$ ini bukan pembuktian, tetapi sekadar menunjukkan satu kasus. Teorema Pythagoras sejak ditemukannya sampai sekarang telah dibuktikan lebih dari 200 cara.

Berikut salah satu pembuktian teorema tersebut.



Gambar 1.1. Pembuktian Teorema Phytagoras

Luas daerah persegi kecil dengan sisi c sama dengan luas persegi besar dengan sisi a + b dikurangi 4 kali luas daerah segitiga siku-siku.

Secara aljabar dapat kita selesaikan menjadi,

$c^2 = (a + b)^2 - 4$ luas daerah segitiga

$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4\ \frac{1}{2}$ alas x tinggi

$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4\ \frac{1}{2}\ ab$

$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2\ ab$

$c^2 = a^2 + b^2$ terbukti (c sisi miring, a dan b sisi siku-siku segitiga)

Titik

Pada bagian pendahuluan telah disinggung bahwa titik, garis, dan bidang adalah unsur-unsur yang tidak didefinisikan. Unsur-unsur sederhana yang mudah dipahami tetapi menjadi blunder (berbelit) apabila kita mencoba membuat definisinya. Sehingga para akhli geometri mengelompokan konsep titik, garis, dan bidang ke dalam kelompok unsur yang tidak didefinisikan atau disebut pengertian pangkal.

Dalam geometri, titik adalah konsep abstrak yang tidak berwujud atau tidak berbentuk, tidak mempunyai ukuran, tidak mempunyai berat, atau tidak mempunyai panjang, lebar, atau tinggi. Titik adalah ide atau gagasan abstrak yang hanya ada dalam benak orang yang memikirkannya.

Untuk melukiskan atau menggambarkan titik diperlukan simbol atau model. Gambar simbol atau model untuk titik digunakan noktah seperti di bawah ini,

• • •

Gambar 1.2. Simbol Untuk Titik

Gambar atau model sebuah titik biasanya diberi nama. Nama untuk sebuah titik umumnya menggunakan huruf kapital yang diletakan dekat titik tersebut, misalnya seperti contoh di bawah ini adalah titik A, titik P, dan titik Z.

• • •
A P Z

Gambar 1.3. Nama Dari Sebuah Titik

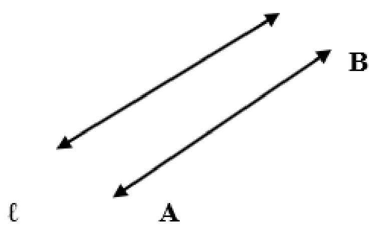
Melukis atau menggambar sebuah titik dapat menggunakan ujung benda, misalnya dengan ujung pinsil, pena, jangka, atau kapur yang ditekan pada bidang tulis atau permukaan kertas atau papan tulis. Apabila anda menekankan ujung pinsil pada permukaan kertas maka noktah hitam yang membekas pada permukaan kertas tersebut adalah titik.

Gambar atau model titik dapat pula diperoleh dengan cara menggambar bagian-bagian benda. Misalnya menggambar bagian dari penggaris dengan cara meletakan sebuah penggaris pada papan tulis kemudian gambar sebuah titik pada sisi penggaris dengan cara menekankan kapur ke papan tulis dan kemudian angkat penggaris tersebut. Kita dapat melihat bahwa pada papan tulis terdapat noktah hasil goresan ujung kapur terhadap papan tulis, dan goresan itu adalah titik.

Garis

Garis adalah konsep yang tidak dapat dijelaskan dengan menggunakan kata-kata sederhana atau kalimat simpel. Karenanya garis juga dikelompokan ke dalam unsur yang tidak didefiniskan. Garis adalah ide atau gagasan abstrak yang bentuknya lurus, memanjang ke dua arah, tidak terbatas atau tidak bertitik akhir, dan tidak tebal. Garis adalah ide atau gagasan yang hanya ada dalam benak pikiran orang yang memikirkannya. Mengambar model garis dapat dilakukan dengan membuat goresan alat tulis pada bidang tulis, kertas, atau papan tulis dengan bentuk yang lurus. Atau model garis dapat dibuat dengan menggambar bagian sisi benda yang lurus, misalnya menggambar salah satu sisi penggaris kayu. Berikut adalah model garis yang diperoleh dari hasil menggambar salah satu bagian sisi penggaris dengan memberi tanda anak panah pada kedua ujungnya yang menandakan bahwa garis tersebut memanjang kedua arah tidak mempunyai titik akhir.

Menamai sebuah garis dapat dilakukan dengan menggunakan dua cara. Pertama dengan sebuah hurup kecil pada salah satu ujung garis. Kedua menggunakan dua hurup besar yang diletakan pada dua titik pada garis tersebut. Di bawah ini adalah dua cara memberi nama terhadap garis.



Gambar 1.4. Cara Pemberian Nama Terhadap Garis.

Garis yang paling kiri adalah garis ℓ dan yang sebelah kanan adalah garis AB. Notasi untuk menyatakan garis AB ditulis dengan AB. Garis disebut juga sebagai unsur geometri satu dimensi. Karena garis adalah konsep yang hanya memiliki unsur panjang saja (linier).

Bidang

Bidang adalah unsur lain dalam geometri yang tidak dapat dijelaskan menggunakan kata-kata sederhana atau kalimat simpel seperti halnya titik dan garis. Apabila kita mencoba membuat definisi bidang maka akan berbelit atau blunder. Oleh karena itu seperti titik dan garis, bidang juga dimasukan ke dalam kelompok unsur yang tidak didefinisikan.

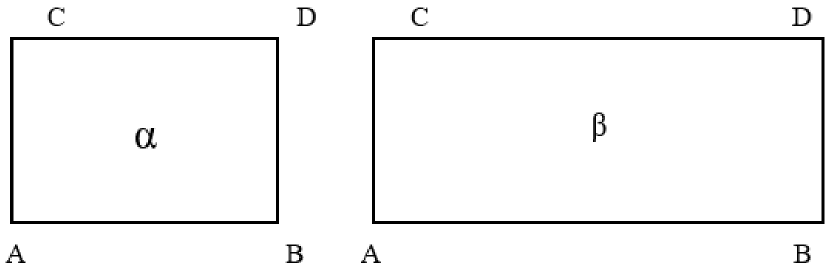
Bidang adalah ide atau gagasan abstrak yang hanya ada dalam benak pikiran orang yang memikirkannya. Bidang diartikan sebagai permukaan yang rata, meluas ke segala arah dengan tidak terbatas, dan tidak memiliki tebal. Bidang masuk ke dalam bangun dua dimensi, karena bidang dibentuk oleh dua unsur yaitu panjang dan lebar.

Model bidang dapat digambarkan oleh bagian dari benda, misalnya bagian permukaan kaca, permukaan daun pintu, lembaran kertas, atau dinding tembok kelas yang rata. Atau bidang dapat diperoleh dengan cara mengiris tipis-tipis permukaan benda sehingga diperoleh lembaran-lembaran tipis, misalnya bagian salah satu sisi balok diiris-iris menjadi bagian-bagian yang tipis. Bagian-bagian tersebut adalah model-model bidang.

Di bawah ini adalah gambar atau model dari bidang.

Gambar 1.5. Sebuah Bidang

Memberi nama sebuah bidang dapat menggunakan sebuah hurup kecil atau hurup-hurup Yunani seperti α (alpa), β (beta), γ (gamma) yang diletakan di daerah dalam bidang tersebut. Atau menggunakan hurup-hurup besar yang disimpan di titik-titik sudut bidang tersebut. Berikut adalah cara memberi nama sebuah bidang.



Gambar 1.6. Pemberian Nama Dari Sebuah Bidang

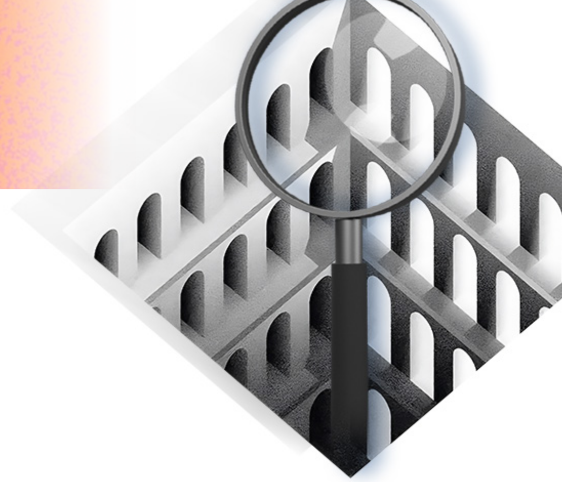
Ruang

Seperti halnya titik, garis, dan bidang, ruang juga adalah ide atau gagasan abstrak yang hanya ada dalam benak pikiran orang yang mempersoalkannya. Ruang diartikan sebagai unsur geometri yang memiliki panjang, lebar, dan tinggi yang terus mengembang tidak terbatas. Ketiga unsur pembentuk ruang tersebut terus berkembang tanpa batas.

Oleh karenanya ruang disebut sebagai bangun tiga dimensi karena memiliki tiga unsur yaitu panjang, lebar, dan tinggi. Ruang dapat diilustrasikan sebagai balon yang ditiup terus mengembang tanpa pecah. Balon yang mengembang tersebut dibentuk oleh titik-titik pada balon dan udara sebagai titik-titik di dalam balon. Sehingga ruang digambarkan sebagai balon yang terus mengembang tanpa pecah dengan titik-titik pada balon dan titik-titik di dalam balon yang kesemua titik-titik itu mengembang tanpa berhenti. Atas dasar itu ruang didefinisikan sebagai kumpulan dari titik-titik.

Selain ruang dapat diilustrasikan sebagai balon yang ditiup dan terus mengembang tanpa batas seperti di atas, ruang juga dapat digambarkan sebagai gabungan dari permukaan tertutup sederhana dengan daerah dalamnya dan dengan kumpulan titik–titik di bagian luar permukaan tertutup sederhana tersebut. Permukaan tertutup sederhana di analogikan sebagai kulit balon yang sudah ditiup. Sedangkan daerah dalam adalah udara yang mengisi balon tersebut.

Ruang dapat dibuatkan modelnya. Model bangun ruang adalah benda tiga dimensi yang solid atau padat yang mencerminkan berkumpulnya titik-titik. Misalnya balok atau kubus kayu, prisma segitiga padat dan sebagainya. Piramida tempat penguburan mayat raja-raja Mesir jaman dulu salah satu contoh model bangun ruang. Akan tetapi kita dapat membuat model-model bangun ruang yang bagian dalamnya kosong, misalnya kardus bekas bungkus kulkas, bekas bungkus mesin cuci, bekas bungkus TV dan sebagainya.



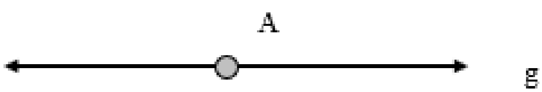
BAB II

KEDUDUKAN TITIK, GARIS, DAN BIDANG DALAM RUANG

A. Kedudukan Titik terhadap Garis

Kedudukan titik terhadap garis hanya ada 2 kemungkinan, yaitu:

1. Sebuah titik dikatakan terletak pada garis, jika titik itu dilalui garis tersebut



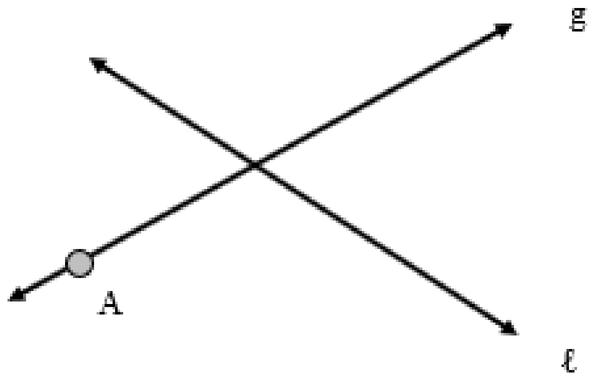
Gambar 2.1. Titik Terletak Pada Garis

2. Sebuah titik dikatakan berada diluar garis, jika titik itu tidak dilalui garis tersebut

Gambar 2.2. Titik Terletak Diluar Garis

Contoh:

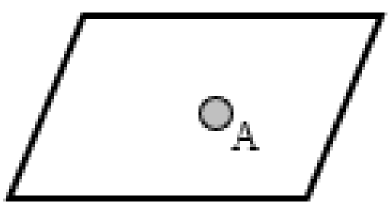
Titik A terletak pada garis g dan diluar garis ℓ



Gambar 2.3. Tiitik Terletak Pada Garis g Dan Diluar Garis ℓ

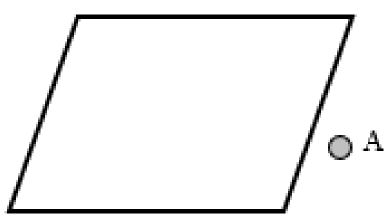
B. Kedudukan Titik terhadap Bidang

1. Titik dikatakan terletak pada bidang, jika titik itu dilalui bidang tersebut



Gambar 2. 4. Titik Terletak Pada Bidang

2. Titik dikatakan berada diluar bidang, jika titik itu tidak dilalui bidang tersebut

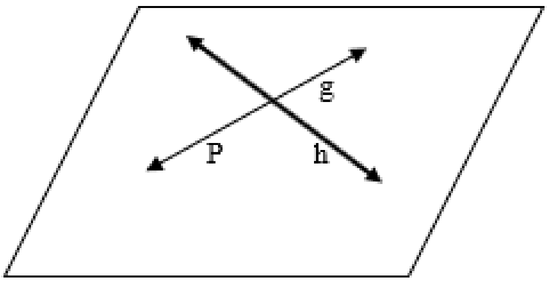


Gambar 2.5. Titik Terleletak Diluar Bidang

C. Kedudukan Garis terhadap Garis Lain

Dua Garis berpotongan

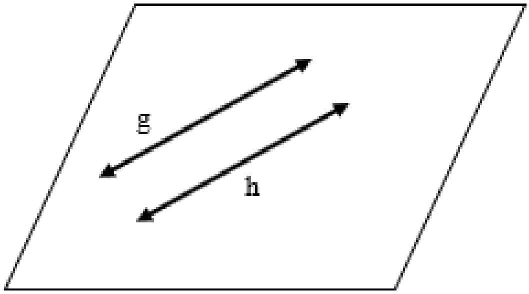
Dua buah garis dikatakan berpotongan, jika kedua garis tersebut terletak pada bidang yang sama dan mempunyai satu titik persekutuan atau titik potong.



Gambar 2.6. Garis g dan h terletak pada bidang yang sama

Dua Garis yang Sejajar

Dua buah garis dikatakan sejajar, jika kedua garis terletak pada bidang yang sama dan tidak mempunyai titik persekutuan.



Gambar 2.7. Garis g dan h Terletak Pada Bidang Yang Sama

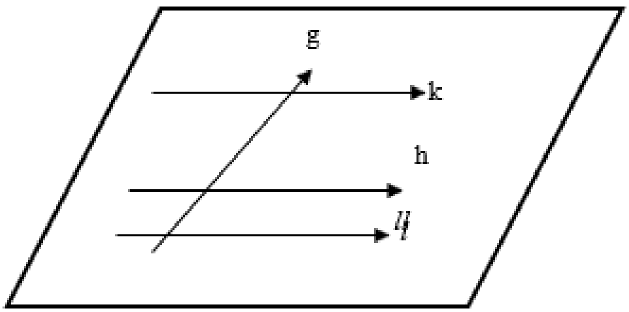
Dalil-dalil tentang Dua Garis sejajar

- Dalil I:

  Jika garis k sejajar dengan garis l dan garis l sejajar dengan garis m, maka garis k sejajar dengan garis m.

- Dalil II:

  Jika garis k sejajar garis h dan memotong garis g, garis l sejajar garis h dan juga memotong garis g, maka garis-garis k, l, dan g terletak pada sebuah bidang.



Gambar 2.8. Garis k, l, dan g Terletak Pada Sebuah Bidang

- Dalil III:

  Jika garis k sejajar garis l dan garis l menembus bidang α, *maka garis k juga menembus bidang* α.

Dua Garis yang bersilangan

Dua buah garis dikatakan bersilangan, jika kedua garis tidak terletak pada bidang yang sama atau dua buah garis dikatakan bersilangan, jika tidak dapat dibuat sebuah bidang yang melalui kedua garis itu.

- Garis g terletak pada bidang V dan garis h terletak pada bidang W
- Jika bidang W diperluas melalui garis g akan memotong garis h di Q
- Jika bidang W diperluas melalui garis h akan memotong garis g di P

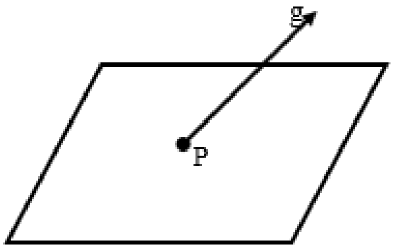
D. Kedudukan Garis terhadap Bidang

Kedudukan garis terhadap bidang kemungkinannya adalah garis terletak pada bidang, sejajar pada bidang, atau memotong (menembus) bidang.

Garis memotong atau menembus bidang

Garis dikatakan menembus (memotong) bidang jika garis dan bidang hanya mempunyai satu titik persekutuan. Titik persekutuan tersebut disebut titik potong atau titik tembus.

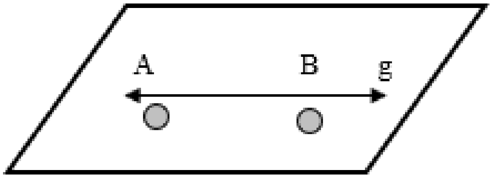
Titik P disebut titik potong antara garis g dan bidang V atau titik P terletak pada garis g dan bidang V.



Gambar 2.9. Bidang V Memotong Garis g Di Titik P

Garis terletak pada Bidang

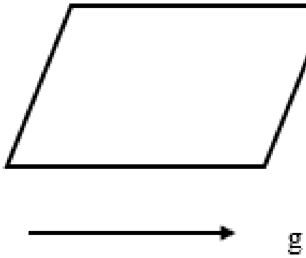
Jika garis dan bidang mempunyai sekurang-kurangnya dua titik persekutuan, maka garis tersebut terletak pada bidang itu.



Gambar 2.10. Garis g Terletak Pada Bidang V Dan Bidang V Melalui Garis g

Garis sejajar Bidang

Jika garis dan bidang tidak mempunyai titik persekutuan, maka garis tersebut sejajar dengan bidang.

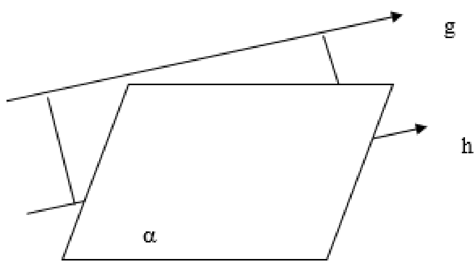


Gambar 2.11. Garis Sejajar Bidang

Dalil-dalil tentang Garis sejajar Bidang

- Dalil I:

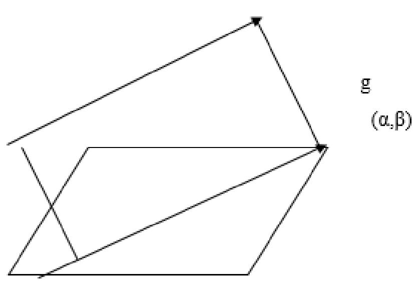
  Jika garis g sejajar dengan garis h dan garis h terletak pada bidang α, *maka garis g sejajar dengan bidang* α.



Gambar 2.12. Garis g Sejajar Dengan Bidang α

- Dalil II:

  Jika bidang α *melalui garis g dan garis g sejajar terhadap bidang* β, *maka garis potong antara bidang* α *dengan bidang* β *akan sejajar terhadap garis g.*



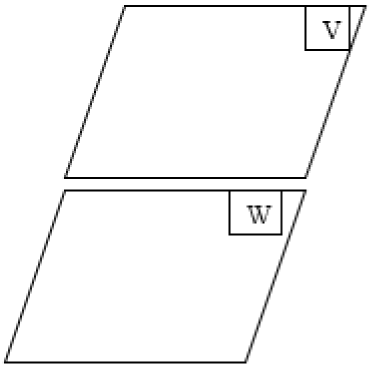
Gambar 2.13. Bidang α Dan β Sejajar Terhadap Garis g

E. Kedudukan Bidang terhadap Bidang

Kedudukan dua bidang hanya ada 3 kemungkinan, yaitu sejajar, berimpit dan berpotongan.

Dua bidang yang sejajar.

Dua buah bidang dikatakan sejajar apabila kedua bidang itu tidak mempunyai titik persekutuan.

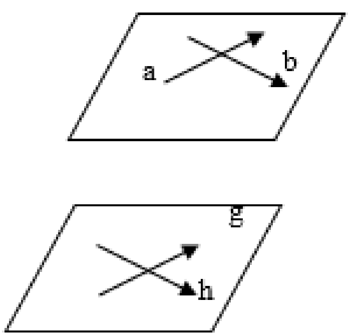


Gambar 2.14. Dua Bidang Yang Sejajar

Dalil-dalil tentang Dua bidang Sejajar

- Dalil I:

  Jika garis a sejajar garis g dan garis b sejajar garis h, garis a dan garis b berpotongan terletak pada bidang α*, garis g dan garis h berpotongan terletak pada bidang* β*, maka bidang* α *sejajar dengan bidang* β*.*



Gambar 2.15. Bidang α **Sejajar Dengan Bidang** β

- Dalil II:

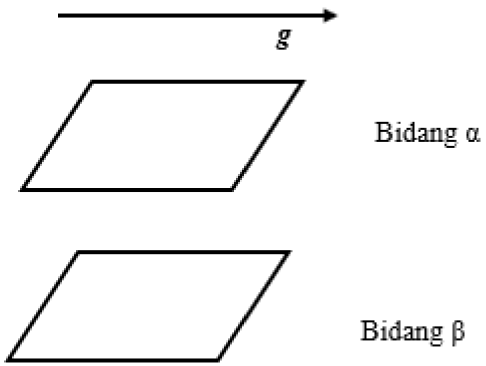
  Jika bidang α sejajar bidang β dan dipotong oleh bidang γ, maka garis potong (α,γ) sejajar garis potong (β,γ).

- Dalil III:

  Jika garis g menembus bidang α dan bidang α sejajar bidang β, maka garis g juga menembus bidang β.

- Dalil IV:

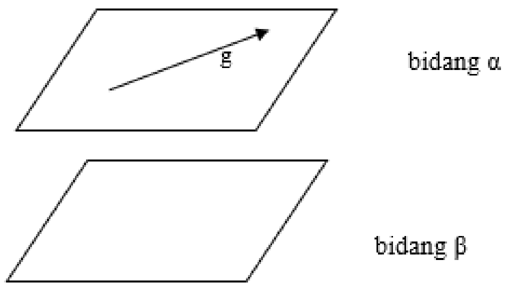
  Jika garis g sejajar bidang α dan bidang α sejajar bidang β, maka garis g juga sejajar bidang β.



Gambar 2.16. Garis g Sejajar Bidang β

- Dalil V:

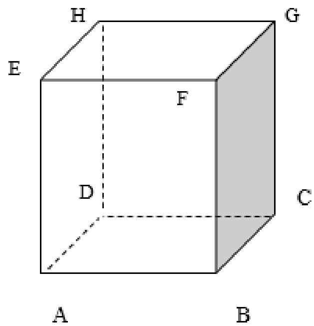
  Jika garis g terletak pada bidang α dan bidang α sejajar bidang β, maka garis g sejajar bidang β.



Gambar 2.17. Garis g Sejajar Bidang β

F. Soal-soal Latihan

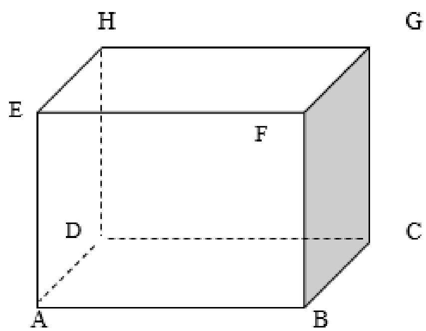
1. Amatilah Kubus ABCD EFGH berikut ini:



Tentukanlah:

a. Rusuk-rusuk kubus yang berpotongan dengan garis g
b. Rusuk-rusuk kubus yang sejajar dengan garis g
c. Rusuk-rusuk kubus yang tidak berpotongan dan tidak sejajar dengan garis g

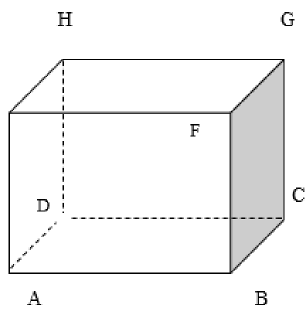
2. Amatilah Kubus ABCD EFGH berikut ini:



Tentukanlah:

a. Rusuk-rusuk yang menembus bidang ABCD
b. Rusuk-rusuk yang sejajar bidang BCGF
c. Rusuk-rusuk yang berpotongan dengan garis AG
d. Garis yang sejajar dengan garis AH
e. Garis yang bersilangan dengan EG

3. Amatilah kubus ABCD EFGH berikut ini:



Tentukanlah:

a. Garis-garis yang berpotongan dengan AC

b. Garis-garis yang bersilangan dengan EH

4. Diketahui kubus ABCD EFGH. Jika titik I dan titik J berturut-turut adalah titik-titik tengah GH dan EF, carilah pasangan-pasangan yang menunjukkan kedudukan hubungan keduanya

a. Dua garis yang sejajar

b. Dua garis yang berpotongan

c. Dua garis yang berpotongan tegak lurus

d. Dua garis yang bersilangan

e. Dua garis yang bersilangan tegak lurus

f. Dua bidang yang sejajar

g. Dua bidang yang berpotongan

h. Dua bidang yang berpotongan tegak lurus

5. Diketahui sebuah Limas T.ABCD dengan ABCD bujur sangkar, Jika TC $\perp$ ABCD, selidikilah apakah pernyataan berikut benar atau salah

a. TD $\perp$ BC

b. TA $\perp$ BD

c. TB $\perp$ CD

d. TC $\perp$ BD

e. TB berpotongan AD

f. TA bersilangan CD

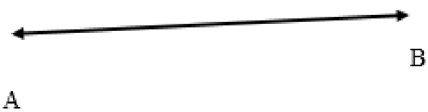
g. Bidang ABCD $\perp$ bidang TCD

BAB III

MENTENTUKAN JARAK DALAM RUANG

A. Jarak Titik ke Titik

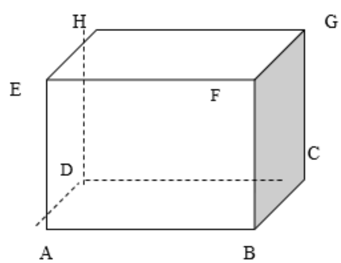
Jarak antara dua titik adalah panjang ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut.



Gambar 3.1. Jarak antara titik A dan titik B adalah panjang ruas garis AB.

Soal Latihan:

1. Amatilah kubus ABCD EFGH berikut ini:

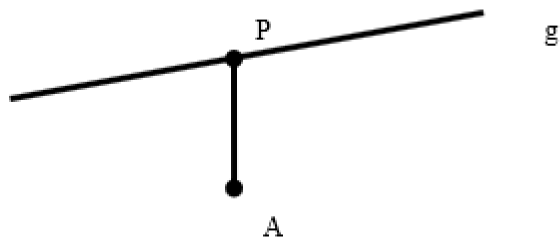


Jika rusuk kubus ABCD EFGH diatas adalah 6 cm, maka tentukanlah:

a. Jarak titik A dan B
b. Jarak titik A dan C
c. Jarak titik A dan G

B. Jarak antara Titik dengan Garis

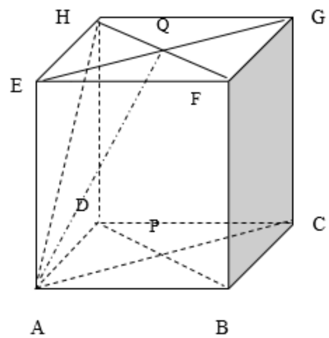
Jarak antara titik dengan garis adalah panjang ruas garis yang ditarik dari titik tersebut yang tegak lurus terhadap garis itu.



Gambar 3.2. Jarak Antara Titik A Dengan Garis g Adalah Panjang Ruas Garis AP.

Soal Latihan

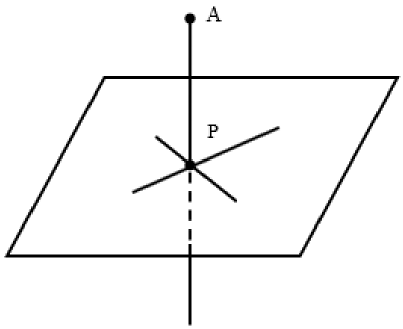
1. Amatilah kubus ABCD EFGH berikut ini



Jika kubus ABCD EFGH diatas memiliki rusuk 6 cm
Hitunglah:
a. jarak antara titik A ke $\overline{BD}$
b. jarak antara titik A ke $\overline{HG}$
c. jarak antara titik A ke $\overline{HF}$

C. Jarak antara Titik ke Bidang

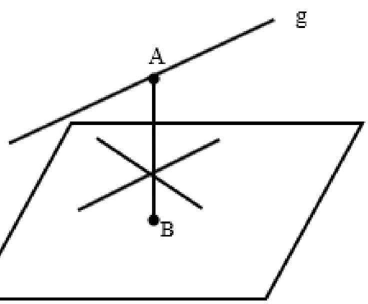
Jarak antara titik dengan bidang adalah panjang ruas garis yang ditarik dari titik tersebut yang tegak lurus bidang itu.



Gambar 3.3. Jarak antara titik A dan bidang V adalah panjang ruas garis AP.

D. Jarak antara Garis dengan Bidang

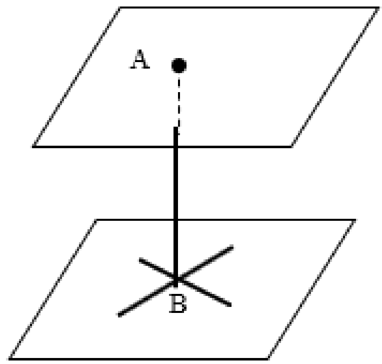
Jarak antara garis dan bidang adalah panjang ruas garis yang ditarik dari titik sebarang yang terletak pada garis tersebut yang tegak lurus bidang.



Gambar 3.4. Jarak Antara Garis g Dengan Bidang V Adalah Panjang Ruas Garis AB. Jika AB tegak lurus bidang V dan g // V, maka AB tegak lurus garis g.

E. Jarak antara Bidang dengan Bidang

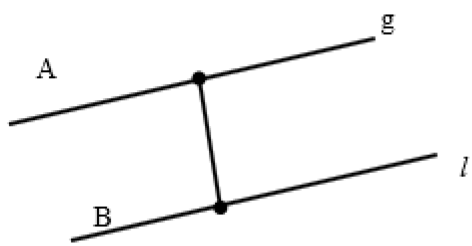
Jarak antara bidang dengan bidang adalah panjang ruas garis yang tegak lurus bidang tersebut.



Gambar 3.5. Jarak Antara Bidang V Dengan Bidang W Adalah Panjang Ruas Garis AB. Jika AB Tegak Lurus W dan V Sejajar W, Maka AB Juga Tegak Lurus V.

F. Jarak antara Garis dengan Garis

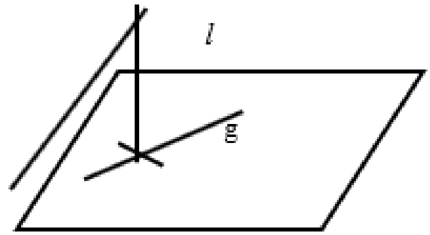
1. Jarak antara Garis dengan Garis yang sejajar
   Jarak antara garis dengan garis yang sejajar adalah panjang ruas garis yang berpotongan dan tegak lurus kedua garis tersebut.



Gambar 3.6. Jarak antara garis g dan garis l adalah panjang ruas garis AB.

2. Jarak antara Garis dengan Garis yang bersilangan
   Untuk menentukan jarak antara garis dengan garis yang bersilangan dapat menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

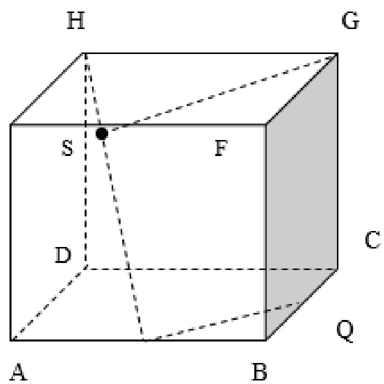
   Gambar bidang yang melalui garis yang satu dan sejajar garis yang lain, maka jarak antara garis yang bersilangan sama dengan jarak antara bidang tersebut dengan garis yang sejajar itu.



Gambar 3.7. Jika l Dan g Bersilangan, Bidang V Melalui g Dan Sejajar l, Maka Jarak Antara l Dan g Sama Dengan Jarak Antara Bidang V Dan Garis l.

G. Soal Latihan

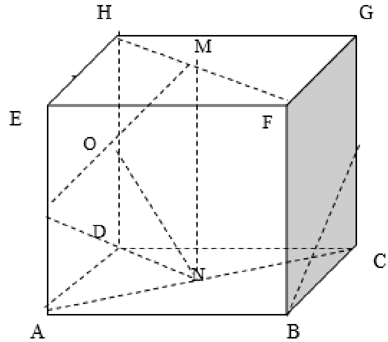
1. Diketahui kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk 4 cm. Titik P dan Q berturut-turut terletak ditengah-tengah garis AB dan BC.



Hitunglah jarak antara:

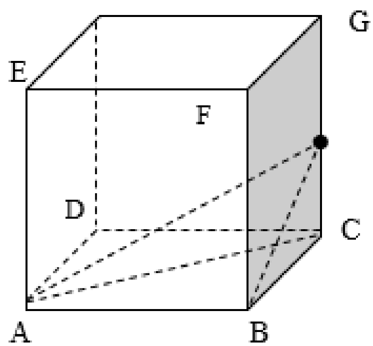
a. Titik P ke titik Q
b. Titik P ke titik H
c. Titik G ke garis PH
d. Titik B ke bidang ACF

2. Diketahui panjang rusuk ABCD EFGH adalah 6 cm. Titik R terletak ditengah-tengah CG dan titik K terletak ditengah-tengah AE.



Tentukanlah jarak antara bidang KFH dengan bidang RBD?

3. Diketahui kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk 5 cm. Titik P adalah pertengahan rusuk CG



Hitunglah jarak:

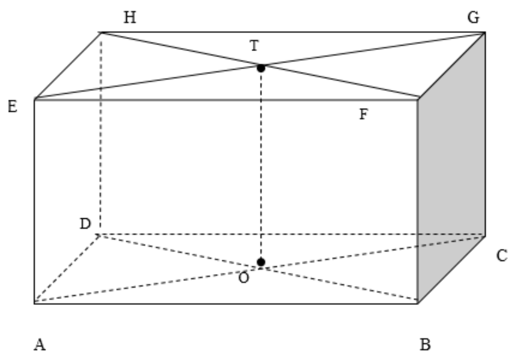
a. titik A ke titik B
b. titik A ke titik C
c. titik A ke titik D
d. titik A ke titik G
e. titik A ke titik P
f. titik B ke titik P

4. Dengan menggunakan kubus ABCD EFGH seperti pada soal no 3 sebelumnya, hitunglah jarak:

a. titik A ke garis BC
b. titik A ke garis FG

c. titik C ke garis FH
d. titik P ke garis CD
e. titik P ke garis BF
f. titik P ke garis BD

5. Diketahui balok ABCD EFGH dengan AB = 10 cm, AD = 8 cm, dan AE = 6 cm. Titik O adalah titik potong diagonal-diagonal bidang alas AC dan BD.



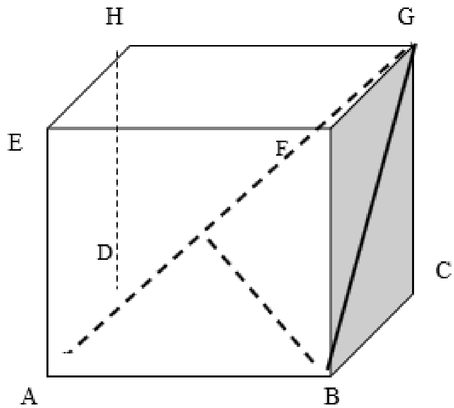
Hitunglah jarak:

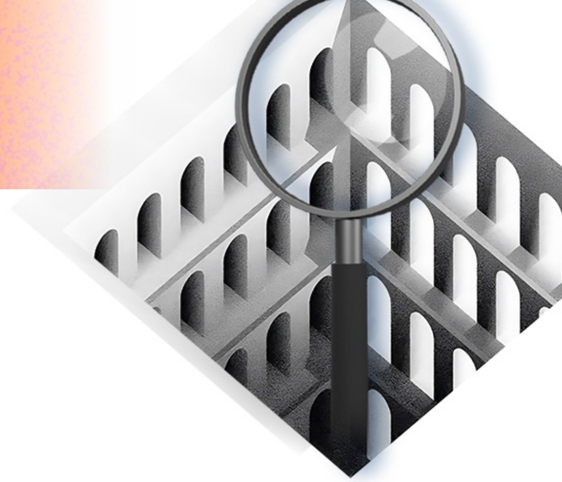
a. titik A ke bidang BCGF
b. titik A ke bidang CDHG
c. titik O ke bidang ABFE
d. titik O ke bidang BCGF
e. titik O kebidang EFGH
f. titik A ke bidang EFGH

6. Diketahui sebuah balok ABCD EFGH dengan panjang rusuk AB = 5 cm, BC = 4 cm dan AE = 3 cm. Hitunglah:
   a. Jarak antara garis AE dan bidang BCGF
   b. Jarak antara bidang ABCD dan bidang EFGH

7. Diketahui sebuah kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Gambar dan hitunglah jarak antara:
   a. garis AE dan garis BF
   b. garis AE dan garis CG
   c. garis AE dan garis GH
   d. garis AE dan garis BH

8. Diketahui panjang rusuk kubus ABCD EFGH pada gambar adalah 8 cm. Jika titik P adalah titik perpotongan garis AC dan garis BD, maka tentukanlah jarak titik G dan P?
9. Diketahui panjang rusuk kubus ABCD EFGH adalah 6 cm. Tentukanlah jarak titik B ke diagonal ruang AG





BAB IV

MENENTUKAN SUDUT DALAM RUANG

Dalam Bab sebelumnya telah kita bahas bagaimana cara mengukur jarak dalam ruang. Dalam bab ini akan kita pelajari bagaimana cara mengukur (menggambar dan menghitung) besaran sudut dalam ruang. Sudut-sudut dalam ruang dapat dibentuk oleh 2 unsur ruang yaitu

- garis dengan garis
- garis dengan bidang
- bidang dan bidang

A. Sudut antara Garis dan Garis

Kita masih ingat bahwa kedudukan garis g dan garis h dalam ruang dapat berpotongan, berimpit, sejajar atau bersilangan. Berdasarkan kedudukan garis g dan h dalam ruang itu, dapat diamati fakta-fakta sebagai berikut:

- Dalam hal garis g berimpit dengan garis h atau garis g sejajar garis h, maka sudut yang dibentuk oleh kedua garis itu sama dengan nol

- Dalam hal garis g berpotongan dengan garis h atau garis g bersilangan dengan garis h, maka terdapat sudut yang dibentuk oleh kedua garis itu.

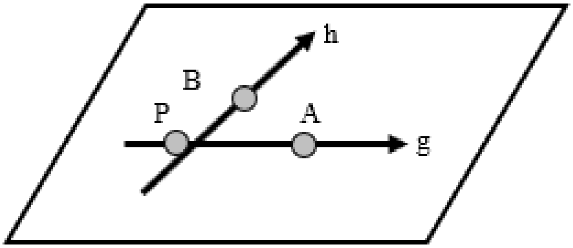
Sekarang yang menjadi masalah adalah bagaimana cara menentukan besar sudut antara dua garis yang berpotongan dan sudut antara dua garis yang bersilangan.

Sudut antara Dua garis berpotongan

Misalkan garis g dan garis h berpotongan di titik P sehingga kedua garis itu terletak pada sebuah bidang α. Sudut antara garis g dan garis h yang berpotongan dapat igambarkan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

- Ambil sebarang titik A pada garis g dan sebarang titik B pada garis h
- Besar sudut APB ditetapkan sebagai ukuran sudut antara garis g dan garis h yang berpotongan

Proses menentukan sudut antara garis g dan garis h yang berpotongan itu dapat divisualisasikan dengan gambar ruang sebagaimana diperlihatkan pada gambar berikut ini



Gambar 4.1. Sudut Antara Dua Garis Berpotongan

Sudut antara Dua Garis yang bersilangan

Besar sudut antara dua garis yang bersilangan dapat ditentukan dengan menggunakan pertolongan sifat sudut dalam geometri bidang datar. Sifat yang dimaksud dikemukakan sebagai berikut:

Dua buah sudut dikatakan sama besar, jika kaki-kaki kedua sudut itu sejajar dan searah.

Misalkan diketahui garis g dan garis h bersilangan. Garis g menembus bidang α di P dan garis h terletak pada bidang α. Sudut antara garis g dan garis h yang bersilangan itu dapat digambarkan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

- Ambil sebarang titik O pada bidang α
- Melalui titik O, buatlah garis g" sejajar dengan garis g dan garis h" sejajar dengan garis h
- Sudut yang dibentuk oleh garis g" dan garis h" ditetapkan sebagai ukuran besar sudut antara garis g dan garis h yang bersilangan.

Dalam menggambarkan sudut antara garis g dan garis h yang bersilangan, lebih praktis apabila titik O diambil pada salah satu garis (garis g atau garis h).

1. Misalkan titik O diambil pada garis g (titik O diambil tepat berimpit dengan titik P)
   - Melalui titik O, buatlah garis h" yang sejajar dengan garis h
   - Sudut yang dibentuk oleh garis g dan garis h" merupakan ukuran besar sudut antara garis g dan garis h yang bersilangan. Hal ini dapat diperlihatkan pada gambar a)
2. Misalkan titik O diambil pada garis h
   - Melalui titik O, buatlah garis g" yang sejajar dengan garis g
   - Sudut yang dibentuk oleh garis g" dan garis h' merupakan ukuran besar sudut antara garis g dan garis h yang bersilangan.

Soal Latihan

1. Diketahui sebuah kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk 4 cm. Hitunglah besar sudut antara:
   a. garis DE dan garis HF
   b. garis AH dan garis BF
   c. garis DE dan garis BG

2. Kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk AB = 8 cm. Hitunglah besar sudut antara:
   a. garis AD dan garis BG
   b. garis AH dan garis CF
   c. garis AH dan garis DC
   d. garis AH dan garis DF

B. Sudut antara Garis dan Bidang

Kita ingat bahwa kedudukan antara garis dan bidang dalam ruang kemungkinannya adalah:

- garis terletak pada bidang
- garis sejajar bidang
- garis memotong atau menembus bidang

Dalam hal garis terletak pada bidang atau garis sejajar bidang, dapatkah anda menentukan besarnya sudut antara garis dan bidang itu?

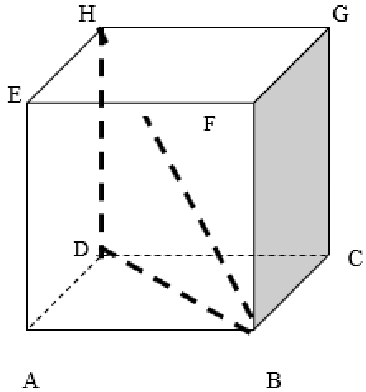
Jika sebuah garis memotong atau menembus bidang, maka terdapat ukuran sudut yang dibentuk oleh garis dan bidang itu. Misalkan bahwa garis g memotong bidang α di titik tembus P. Sudut antara garis g dan bidang α yang berpotongan dapat ditentukan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

- Ambil sebarang titik Q pada garis g
- Melalui titik Q, buatlah garis h yang tegak lurus terhadap bidang α. Garis h ini menembus bidang α di titik Q”
- Sudut QPQ” ditetapkan sebagai ukuran besar sudut antara garis g dan bidang α yang berpotongan.

Berdasarkan penjelasan diatas, sudut antara garis dan bidang yang berpotongan dapat didefenisikan sebagai berikut:

Sudut antara garis g dan bidang α *adalah sudut lancip yang dibentuk oleh garis g dengan proyeksinya pada bidang* α

Sebagai contoh aplikasi bagaimana cara menentukan ukuran sudut ruang yang dibentuk oleh garis dan bidang yang berpotongan, simaklah ilustrasi berikut ini: Kubus ABCD EFGH pada gambar dibawah ini, garis diagonal ruang BH memotong bidang alas ABCD. Sudut antara garis BH dengan bidang alas ABCD atau ∠ (BH, bidang ABCD) ditentukan oleh sudut yang dibentuk oleh garis BH dan garis BD (yaitu ∠ DBH), sebab garis BD merupakan proyeksi dari garis BH pada bidang alas ABCD

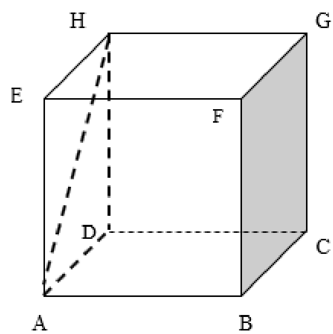


Gambar 4.2. Sudut Antara Garis Dan Bidang

Contoh 1:

Kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk 6 cm

1. Hitunglah besar ∠ (AH, bidang ABCD)
2. Jika sudut antara diagonal ruang AG dengan bidang alas ABCD adalah α, hitunglah:
   a. sin α
   b. cos α
   c. Tan α



Jawab:

1. ∠ (AH, bidang ABCD) = ∠ DAH, yaitu sudut yang dibentuk oleh garis AH dan garis AD, ΔADH adalah segitiga siku-siku sama kaki sehingga ∠ DAH = 45^0
   Jadi besar ∠ (AH, bidang ABCD) = 45^0

2. $\angle$(AG, bidang ABCD) = $\angle$CAG, yaitu sudut yang dibentuk oleh garis AG dan garis AC, sebab AC adalah proyeksi AG pada bidang ABCD (perhatikan gambar dibawah ini).

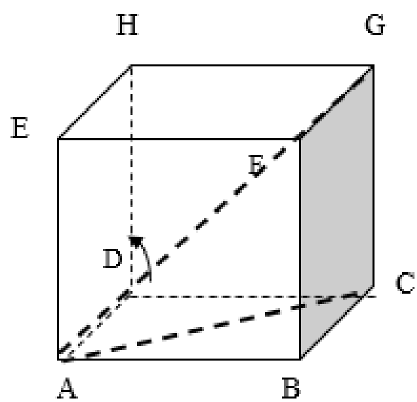
ΔACG merupakan segitiga siku-siku di C dengan AC = $6\sqrt{2}$ cm, AG = $6\sqrt{3}$ cm dan CG = 6 cm.

Dengan mengambil sinus, kosinus, dan tangen sudut α pada ΔACG, diperoleh:

1. $\sin \alpha = \dfrac{CG}{AG} = \dfrac{6}{6\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

2. $\cos \alpha = \dfrac{AC}{AG} = \dfrac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$

3. $\tan \alpha = \dfrac{CG}{AC} = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$



Contoh 2:

Bidang alas dari limas T.ABCD berbentuk persegi panjang dengan AB = 12 cm, AD = 5 cm, dan TA = TB = TC = TD = 7 cm

1. Hitunglah panjang AC dan tinggi limas TO
2. Hitunglah sin $\angle$(TA, bidang alas ABCD)

Jawab:

1. Panjang AC $= \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2}$

$= \sqrt{(12)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{169} = 13$

Tinggi Limas TO $= \sqrt{(TC)^2 - (OC)^2}$

$= \sqrt{(7)^2 - (6{,}5)^2}$

$= \sqrt{6{,}75} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

2. Sudut antara rusuk TA dengan bidang alas ABCD adalah, sebab proyeksi TA pada bidang alas ABCD adalah AO, $\angle TAO$ adalah segitia siku-siku di O, sehingga:

$$\sin \angle TAO = \frac{TO}{TA}$$

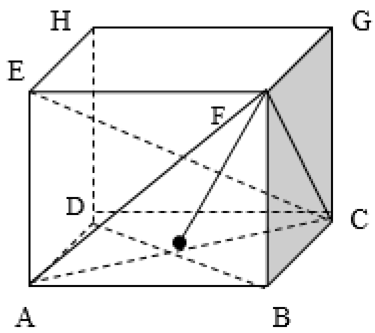
$$\sin \angle TAO = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{7}$$

$$= \frac{3}{14}\sqrt{3}$$

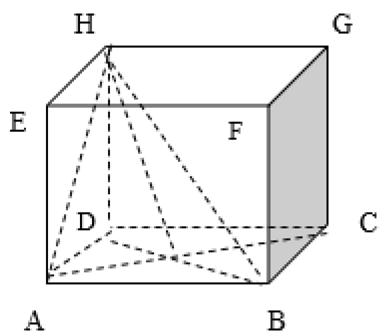
Jadi, $\sin \angle (TA, \text{bidang alas ABCD}) = \frac{3}{14}\sqrt{3}$

Soal Latihan

1. Diketahui kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk 8 cm
   a. Lukis sudut antara BH dan bidang ABCD
   b. Hitung besar sudutnya
2. Diketahui kubus ABCD EFGH, dengan panjang rusuk a cm. Tentukan besar sudut antara:
   a. garis EC dan bidang ABCD
   b. garis FM dan bidang ABCD, dengan titik M adalah pertengahan bidang ABCD



3. Diketahui kubus ABCD EFGH dengan AB = 12 cm. Titik M terletak pada perpotongan diagonal bidang alas. Tentukan besar sudut antara garis MH dan bidang ADHE serta garis BH dan bidang ADHE



4. Diketahui sebuah limas segi empat beraturan T.ABCD dengan AB = BC = 6 cm. Bidang α melalui titik B dan tegak lurus pada garis TD. Bidang itu membagi garis TD sama panjang.
   a. Buktikan bahwa rusuk-rusuk tegak limas itu membentuk sudut 60^0 dengan bidang alasnya
   b. Hitunglah luas bidang α

C. Sudut antara Bidang dengan Bidang

Kita ingat kembali kedudukan dua bidang dalam ruang kemungkinannya adalah:

- dua bidang berimpit
- dua bidang sejajar
- dua bidang berpotongan

Jika dua bidang berimpit atau dua bidang sejajar, maka sudut yang dibentuk oleh dua bidang yang berimpit atau bidang yang sejajar itu sama dengan nol. Tetapi jika dua bidang berpotongan, maka terdapat ukuran sudu yang dibentuk oleh dua bidang yang berpotongan itu.

Misalkan bahwa bidang α dan bidang β berpotongan pada garis potong (α, β). Sudut antara bidang α dan bidang β yang berpotongan dapat ditentukan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

- Ambil sebarang titik P pada garis potong (α, β)
- Melalui titik P buatlah garis PQ pada bidang α dan garis PR pada bidang β yang masing-masing tegak lurus terhadap garis potong (α, β)
- Sudut QPR ditetapkan sebagai ukuran sudut antara bidang α dan bidang β yang berpotongan.

Perhatikan bahwa sudut QPR merupakan sudut yang dibentuk oleh perpotongan garis PQ dengan garis PR. Proses menentukan sudut antara bidang α dan bidang β yang berpotongan itu dapat divisualisasikan dengan gambar ruang sebagaimana diperlihatkan pada gambar berikut ini:

Berdasarkan penjelasan diatas, sudut antara dua bidang yang berpotongan dapat didefenisikan sebagai berikut:

> *Sudut antara dua bidang yang berpotongan adalah sudut yang dibentuk oleh dua garis yang berpotongan (sebuah garis pada bidang pertama dan sebuah garis lagi pada bidang yang kedua), garis-garis itu tegak lurus terhadap garis potong antara kedua bidang tersebut.*

Dalam menentukan sudut antara bidang α dan bidang β (bidang α dan bidang β berpotongan) yang telah dibicarakan diatas, ada beberap istilah dan ketentuan yang perlu dipahami. Beberapa istilah dan ketentuan itu diantaranya adalah:

- Sudut QPR yang menyatakan ukuran sudut antara bidang α dan bidang β yang berpotongan dinamakan sebagai sudut tumpuan. Bidang PQRS yang memuat sudut tumpuan dinamakan sebagai bidang tumpuan
- Jika α mewakili bidang ABC dan β mewakili bidang BCD, maka sudut tumpuan antara kedua bidang itu dituliskan sebagai $\angle A$ (BC)D atau $\angle A$, BC, D.
- Jika besar sudut antara bidang α dan bidang β yang berpotongan itu sama dengan 90, maka dikatakan bidang α tegak lurus bidang β dan sebaliknya atau kedua bidang saling tegak lurus sesamanya
- Jika sudut antara dua bidang yang berpotongan itu bukan sudut istimewa, maka yang dihitung cukup nilai perbandingan trigonometri (sin, cos, atau tan) dari sudut itu
- Rumus-rumus perbandingan trigonometri dan hubungan teorema pythagoras sering digunakan sebagai pertolongan untuk menentukan besar sudut antara dua bidang yang berpotongan itu.

Sebagai contoh bagaimana cara menentukan ukuran sudut ruang yang dibentuk oleh dua bidang yang berpotongan, simaklah ilustrasi berikut ini:

1. Kubus ABCD EFGH pada gambar dibawah ini, bidang diagonal ABGH dan bidang alas ABCD berpotongan pada garis potong AB. Sudut antara bidang ABGH dan ABCD itu ditentukan sebagai berikut:
   a. Ambil titik B pada ruas garis potong AB (titik P diambil tepat pada titik B)
   b. Melalui titik B dibuat garis BG pada bidang ABGH dan garis BC pada bidang ABCD yang masing-masing tegak lurus terhadap garis potong AB
   c. Sudut CBG merupakan ukuran sudut yang dibentuk oleh bidang diagonal ABGH dan bidang alas ABCD yang berpotongan

2. Bidang empat beraturan T.ABC pada gambar dibawah ini, bidang sisi TAB dan bidang alas ABC berpotongan pada garis potong AB. Sudut antara bidang TAB dan bidang ABC itu ditentukan sebagai berikut:
   a. Ambil titik P pada garis potong AB dan titik P ditetapkan pada titik tengah ruas garis AB
   b. Melalui titik P dibuat garis TP pada bidang TAB dan garis CP pada bidang ABC yang masing-masing tegak lurus terhadap garis potong AB
   c. Sudut CPT merupakan ukuran sudut yang dibentuk oleh bidang sisi TAB dengan bidang alas ABC yang berpotongan

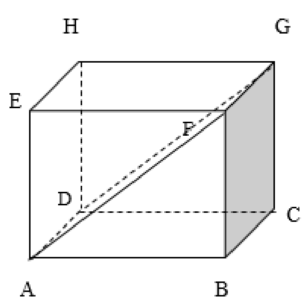
Agar lebih memahami dan terampil dalam menggambar dan menghitung sudut ruang yang dibentuk oleh dua buah bidang yang berpotongan, simaklah contoh berikut ini:

Contoh 1:

Kubus ABCD EFGH dengan panjang rusuk 10 cm

1. Hitunglah besar sudut antara bidang ADGF dengan bidang ABCD
2. Titik-titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk tegak BF dan CG, hitunglah sinus sudut antara bidang EPQH dan bidang EFGH.

Jawab:



1. Perhatikan gambar diatas. Sudut antara bidang ADGF dengan bidang alas ABCD adalah $\angle BAF$ atau $\angle CDG$. Mengapa?

Besar $\angle BAF = 45^0$, sebab AF merupakan diagonal sisi ABFE. Jadi besar sudut antara bidang ADGF dengan bidang ABCD sama dengan 45^0

2. Perhatikan gambar dibawah ini. Sudut antara bidang EPQH dan bidang EFGH adalah $\angle FEP$ atau $\angle GHQ$. Mengapa? ΔFEP siku-siku di F, EF = 10 cm, PF = $\frac{10}{2}$ = 5 cm, sehingga:

$$EP = \sqrt{(EF)^2 + (FP)^2}$$

$$= \sqrt{(10)^2 + (5)^2}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

Nilai Sinus $\angle FEP$:

$$\text{Sinus } \angle FEP = \frac{PF}{EP}$$

$$= \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

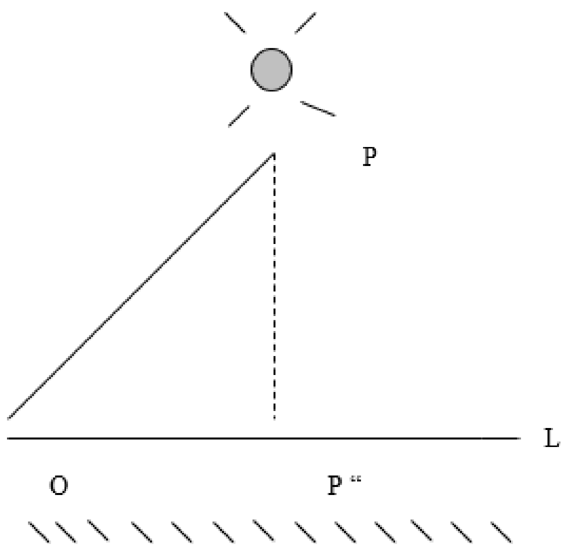
Jadi, sinus sudut antara bidang EPQH dan bidang EFGH sama dengan $\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

BAB V

PROYEKSI DALAM RUANG

Pada tepat tengah siang hari, sinar matahari tepat berada diatas kita. Hal ini berarti sinar matahari membentuk sudut 90^0 terhadap permukaan bumi.

Perhatikan gambar dibawah ini:

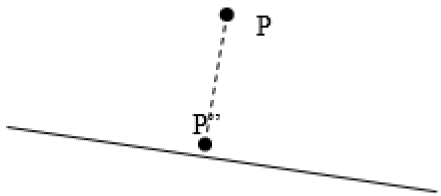


Gambar 5.1. Sinar Matahari Membentuk 90^0 Terhadap Permukaan Bumi

Misalkan permukaan bumi digambar sebagai garis L. Sebuah tongkat OP diletakkan diatas permukaan tanah. Salah satu ujung tongkat yaitu titik O menyentuh permukaan tanah. Sinar matahari menyebabkan bayangan ujung tongkat titik P adalah titik P " dengan PP" adalah garis yang tegak lurus garis L. Titik P disebut proyeksi dari titik P terhadap garis L. Lebih luas, OP" adalah proyeksi dari OP terhadap garis L.

A. Proyeksi Titik pada Garis

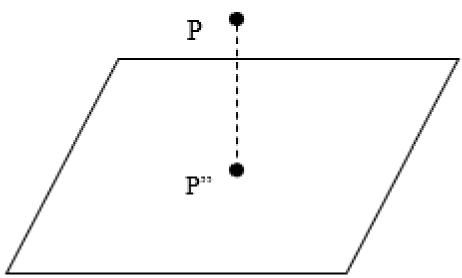
Proyeksi titik P pada garis q adalah titik P" digaris q sehingga ruas PP" $\perp$ q



Gambar 5.2. Proyeksi Titik Pada Garis

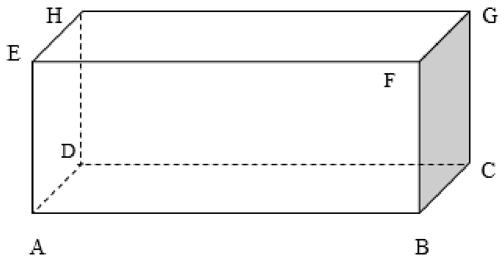
B. Proyeksi Titik pada Bidang

Proyeksi titik P pada α adalah titik tembus garis yang tegak lurus dari p pada bidang α .



Gambar 5.3. Proyeksi Titik Pada Bidang α

Perhatikan balok ABCD EFGH pada gambar berikut ini:



Gambar 5.4. Balok ABCD.EFGH

- Ruas $\overline{BF}$ diperpanjang menjadi garis $\overline{BF}$ dan daerah persegi panjang ABCD diperluas menjadi bidang A"B"C"D".
- Apabila kita ambil titik P sembarang pada garis $\overline{BF}$, maka proyeksi titik P pada bidang ABCD adalah titik B. Demikian pula untuk setiap titi yang terletak pada $\overline{BF}$, maka proyeksinya pada bidang ABCD adalah titik B. Dikatakan bahwa $\overline{BF}$ tegak lurus pada bidang ABCD
- Dari balok diatas dapat pula kita tarik kesimpulan bahwa garis $\overline{BF}$ tegak lurus pada $\overline{AB}$ dan juga tegak lurus pada $\overline{BF}$. Sedangkan $\overline{AB}$ dan $\overline{BF}$ berpotongan di titik B.

Dari balok tersebut dapat diamati bahwa setiap garis yang terletak pada bidang ABCD dan melalui titik B pasti tegak lurus $\overline{BF}$. Atau setiap garis yang terletak pada bidang ABCD pasti tegak lurus $\overline{BF}$.

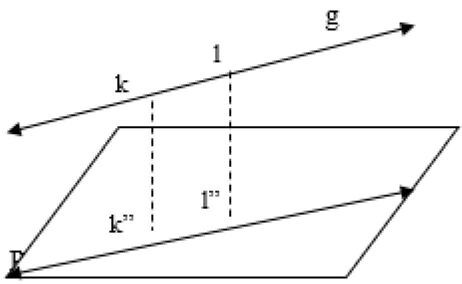
Dari keterangan diatas dapat disimpulkan sebagai berikut:

Sebuah garis tegak lurus pada sebuah bidang apabila garis itu tegak lurus pada dua buah garis berpotongan yang terletak pada bidang tersebut

Jika sebuah garis tegak lurus pada sebuah bidang, maka garis itu tegak lurus pada setiap garis yang terletak pada bidang tersebut

C. Proyeksi Garis pada Bidang

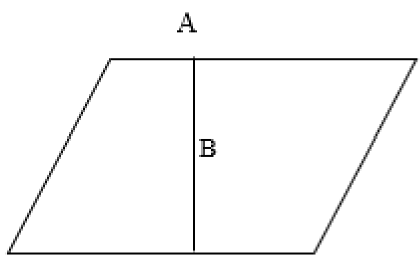
Perhatikan gambar berikut ini



Gambar 5.5. Proyeksi Garis Pada Bidang

Misalkan titik k dan l adalah sebarang titik-titik pada garis g. Proyeksi titik k dan l pada bidang α berturut-turut adalah k” dan l”.Kemudian dari titik k” dan l” dapat dibuat garis g”. Garis g” disebut proyeksi garis g pada bidang α.

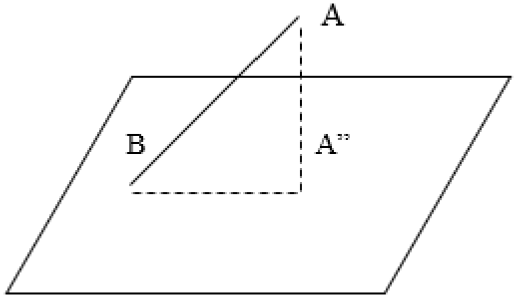
Jika ruas garis AB tegak lurus bidang α, maka proyeksinya pada bidang α berupa satu titik B yang terletak pada bidang α Perhatikan gambar dibawah ini:



Gambar 5.6. Proyeksi Ruas Garis Tegak Lurus Bidang

Jika ruas garis AB tidak tegak lurus bidang α dan menembus bidang α di titik B, maka proyeksi titik A pada bidang α adalah A” dan proyeksi titik B pada bidang α adalah B”. Jadi proyeksi ruas garis AB adalah A”B.

Perhatikan gambar berikut ini:



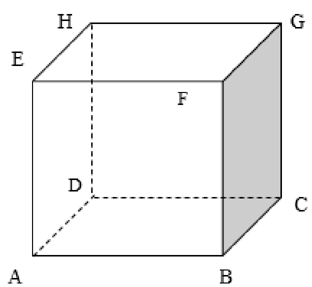
Gambar 5.7. Proyeksi Ruas Garis Yang Memotong Bidang

Contoh 1:

Diketahui kubus ABCD EFGH. Tentukan proyeksi:

1. titik H terhadap $\overline{DC}$
2. titik F terhadap $\overline{AD}$
3. titik C terhadap bidang ADHE
4. ruas garis DH terhadap bidang ABCD
5. ruas garis AF terhadap bidang ABCD
6. ruas garis EG terhadap bidang ABCD

Jawab:



1. Proyeksi titik H terhadap $\overline{DC}$ adalah titik D
2. Proyeksi titik F terhadap $\overline{AD}$ adalah titik A karena $\overline{DC} \perp \overline{AD}$. $\overline{AD} \perp \overline{ABFE}$, maka $\overline{AD}$ tegak lurus semua garis pada ABFE, jadi, $\overline{AD} \perp \overline{AF}$ atau $\overline{AF} \perp \overline{AD}$

3. Proyeksi titik C terhadap ADHE adalah titik D karena CD $\perp$ ADHE

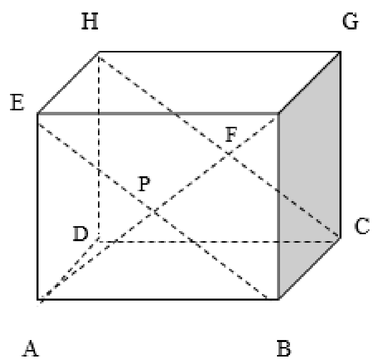
4. Proyeksi $\overline{DH}$ terhadap ABCD adalah titik D, karena OH $\perp$ ABCD

5. Proyeksi titik A terhadap ABCD adalah A dan proyeksi titik F terhadap ABCD adalah B, sehingga proyeksi $\overline{AF}$ terhadap ABCD adalah $\overline{AB}$

6. Proyeksi titik E terhadap ABCD adalah A (karena EA $\perp$ ABCD) dan proyeksi titik G terhadap ABCD adalah titik C. Jadi proyeksi $\overline{EG}$ terhadap ABCD adalah $\overline{AC}$.

Soal Latihan:

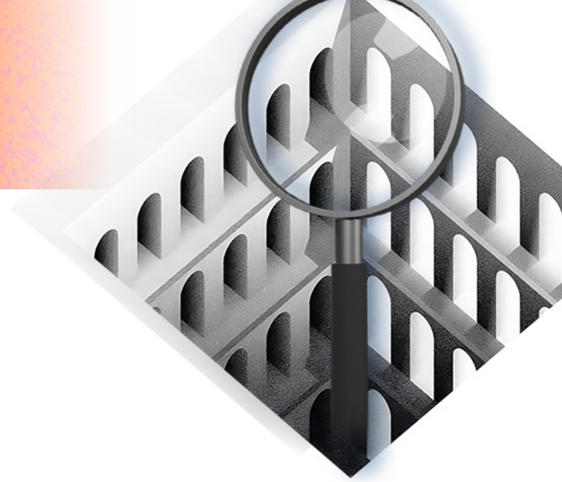
1. Diketahui kubus ABCD EFGH pada gambar berikut ini



   a. Tentukan AF $\perp$ BCHE
   b. Tentukan dan Gambarlah proyeksi titik A terhadap bidang BCHE

2. Diketahui kubus ABCD EFGH . Tentukanlah proyeksi:
   a. titik C pada garis ED
   b. titik E pada bidang CDHG
   c. titik E pada bidang BDG
   d. garis AE pada bidang BCGF
   e. garis AE pada bidang ABCD
   f. garis AG pada bidang ABCD

3. Diketahui limas segi empat beratura T.ABCD. Tentukanlah proyeksi:
   a. titik T pada bidang ABCD
   b. $\overline{TA}$ pada bidang ABCD

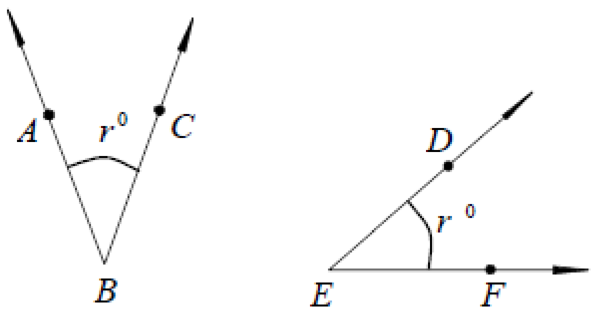


BAB VI

KONGRUENSI DAN KESEBANGUNAN

A. Garis dan Sudut

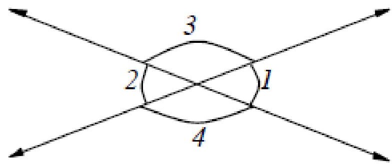
Dua buah sudut dengan ukuran yang sama disebut kongruen.



Gambar 6.1. Dua Buah Sudut Yang Kongruen

Perhatikan gambar 6.1 diatas, □ABC dan □DEF dikatakan kongruen jika ukuran m□ABC = ukuran m□DEF, dan ditulis □ABC □ □DEF. Salah satu contoh sudut yang kongruen adalah sudut yang bertolak belakang, yaitu sudut yang dibentuk oleh perpotongan dua buah segmen garis dan mempunyai besar sudut yang sama atau kongruen.

Dua buah sudut dikatakan *sudut bertolak belakang* adalah apabila sisi- sisinya terbentuk dari dua pasang garis berarah yang berpotongan.



Gambar 6.2. Sudut Yang Bertolak Belakang

Sudut yang bertolak belakang adalah kongruen.

Bukti: Perhatikan gambar 3.1.5, akan dibuktikan $\angle$ 1, $\angle$2 . Karena $\angle$1dan $\angle$3 serta $\angle$2 dan $\angle$3 adalah sudut pelurus, maka

m $\angle$1 + m $\angle$3 = 1800 … (1)

m $\angle$2 + m $\angle$3 = 1800 … (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

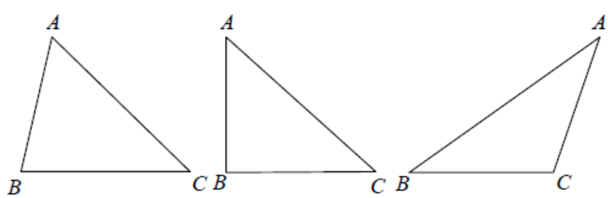
m $\angle$1 + m $\angle$3 = m $\angle$2 + m $\angle$3 m $\angle$1 + m $\angle$2 = m $\angle$3–m $\angle$3 m $\angle$1 = m $\angle$2

Jadi terbukti $\angle 1 \cong \angle 2$

B. Segitiga

Segitiga merupakan suatu bangun datar yang mempunyai tiga buah sisi dan tiga buah sudut. Pada sub bab ini akan dibahas mengenai pengertian dari segitiga, luas segitiga, dan aturan sinus.

Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah titik-titik yang tak segaris, sehingga gabungan dari segmen *AB, AC,* dan *BC* disebut *segitiga*, dan dinotasikan dengan ΔABC.

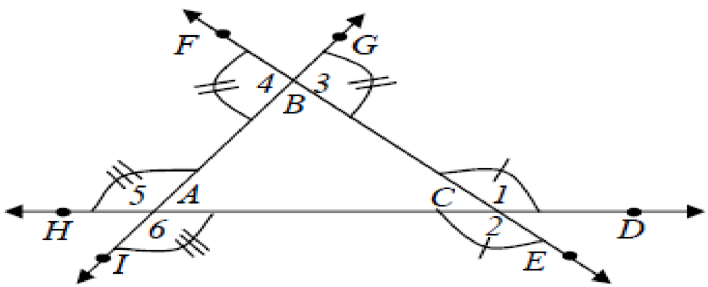


(1) (2) (3)

Gambar 6.3. Segitiga

Perhatikan gambar 6.3.1, titik-titik A, B, dan C disebut puncak dan segmen garis AB, AC, dan BC disebut sisi. Setiap ΔABC mempunyai tiga sudut, yaitu BAC, ABC, dan ACB, atau bisa ditulis dengan $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle C$. Pada setiap segitiga mempunyai sudut luar dan sudut jauh yang masingmasing disebut dengan sudut exterior dan sudut remote interior.

Perhatikan gambar 6.3. 2, terdapat 6 buah sudut exterior dari ΔABC, yaitu $\angle BCD$, $\angle ACE$, $\angle CBG$, $\angle ABF$, $\angle BAH$, dan $\angle CAI$. Selain itu pada ΔABC juga mempunyai sudut remote interior yaitu $\angle A$ dan $\angle B$ yang merupakan sudut remote interior dari $\angle BCD$ dan $\angle ACE$, $\angle A$ dan $\angle C$ yang merupakan sudut remote interior dari$\angle CBG$ dan $\angle ABF$, dan $\angle B$ dan $\angle C$ yang merupakan sudut remote interior dari $\angle BAH$ dan $\angle CAI$. Pada teorema berikut akan dinyatakan bahwa besar sudut exterior lebih besar dari pada sudut remote interiornya.



Gambar 6.4. Sudut Eksterior dan Interior

Besar sudut exterior dari sebuah segitiga adalah lebih besar dari pada tiap-tiap sudut remote interior nya.

Bukti: Perhatikan gambar 6.4, Akan dibuktikan $\angle BCD > \angle A$. Karena $\angle ACB$ dan $\angle BCD$ membentuk pasangan linier, maka diperoleh bahwa $\angle ACB$ dan $\angle BCD$ adalah sudut pelurus, sehingga

$m\angle ACB + m\angle BCD = 1800$ … (1)

Jumlah sudut dalam dari ΔABC adalah

$m\angle A + m\angle B + m\angle ACB = 1800$… (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$m\angle ACB + m\angle BCD = m\angle A + m\angle B + m\angle ACB$

$m\angle BCD = m\angle A + m\angle B + m\angle ACB - m\angle ACB$

$m\angle BCD - m\angle A = m\angle B$… (3)

Dari persamaan (3), karena $m\angle B > 0$ sehingga diperoleh bahwa

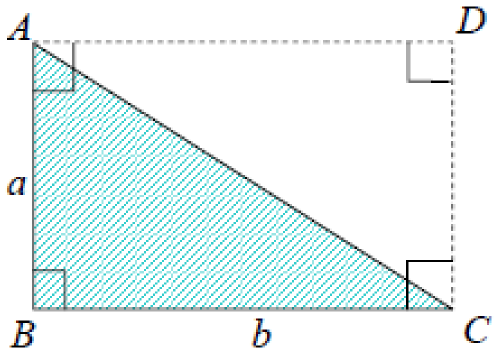
$m\angle BCD - m\angle A > 0$

$m\angle BCD > m\angle A$

Seperti bangun datar lainnya, segitiga juga mempunyai ukuran luas, yang merupakan setengah dari perkalian sisi alas dan garis tingginya. Berikut ini akan diberikan beberapa teorema mengenai luas segitiga.

Luas segitiga siku-siku adalah setengah dari perkalian dua sisi yang mengapit sudut siku sikunya.

Bukti: Perhatikan gambar 6.5 bagian yang diarsir pada ΔABC adalah luas dari segitiga siku-siku ABC. Akan dibuktikan *Luas ABC*



Gambar 6.5. Luas Segitiga

Misalkan titik D merupakan titik luar dari ΔABC, sehingga membentuk persegi panjang $ABCD$ dimana $\angle D$ juga merupakan sudut siku-siku, dan misalkan a dan b adalah sisi-sisi dari persegi panjang $ABCD$ dan dinotasikan dengan $\Delta ABCD$ maka

$L\Delta ABCD = ab \quad \ldots(1)$

$L\Delta ABCD = L\Delta ABC + L\Delta ADC \ldots(2)$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$L\Delta ABC + L\Delta ADC = ab$

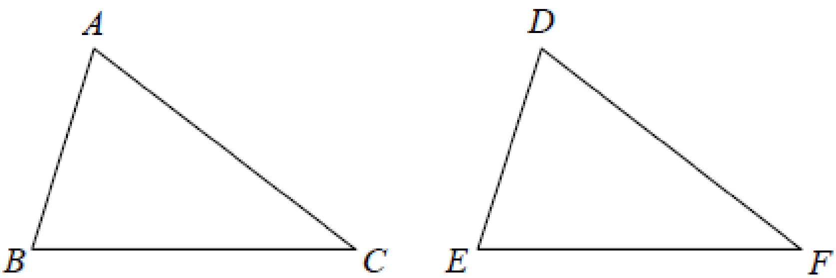
$2.L\Delta ABC = ab$

Jadi Luas ΔABC = $\frac{1}{2}$ ab

C. Kongruensi Antara Dua Segitiga.

Sebelum masuk pada pembahasan dari kongruen antara dua segitiga, akan dijelaskan dulu mengenai korespondensi. Korespondensi antara dua segitiga adalah pemasangan satu-satu antara sisi dan sudut yang bersesuaian dari segitiga satu ke segitiga yang lainnya. Sebagai contoh misalkan diberikan korespondensi antara titik sudut ΔABC dengan ΔDEF.

Perhatikan gambar 6.6., ΔABC dan ΔDEF adalah pemasangan satu-satu dari titik -titik sudut kedua segitiga tersebut, sehingga dikatakan ΔABC berkorespondensi dengan ΔDEF.



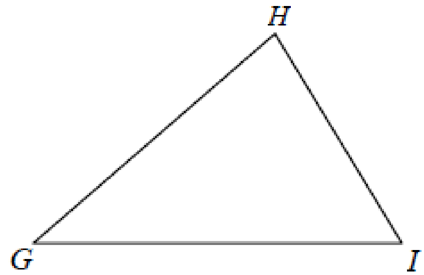
Gambar 6.6. Dua Buah Segitiga Yang Berkorespondensi

Diberikan korespondensi antara dua segitiga. Apabila setiap pasang sisi yang berkorespondensi sama panjang, dan setiap pasang sudut yang berkorespondensi sama besar sehingga korespondensi kedua segitiga tersebut dikatakan *kongruen*.

Berikut ini akan dijelaskan mengenai pengertian *include*, yaitu sebagai syarat dari dua segitiga dikatakan kongruen, yang dijelaskan pada definisi berikut ini.

Sebuah sisi segitiga dikatakan included dengan sudutsudutnya adalah jika puncak-puncaknya adalah titik akhir dari segmen garis tersebut.

Sebuah sudut segitiga dikatakan *included* dengan sisi-sisinya adalah jika sudut tersebut berada pada sisi-sisi yang mengapitnya, sebagai contoh:

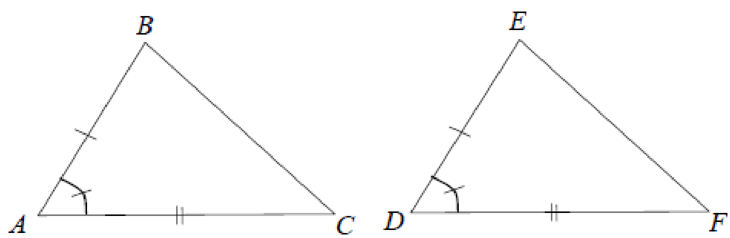


Gambar 6.7. Segitiga yang Included

Perhatikan gambar 6.7, pada ΔGHI, *GI included* dengan $\angle G$ dan $\angle I$, dan $\angle G$ *included*dengan *GH* dan *GI* .

Dalam kongruensi terdapat beberapa kondisi yang menyatakan bahwa dua segitiga dikatakan kongruen berdasarkan korespondensi sisi dan sudut, yang dinyatakan dalam postulat dan teorema berikut

***Postulat* 6.1.** Setiap korespondensi S-Sd-S (sisi-sudut-sisi) adalah kongruen.

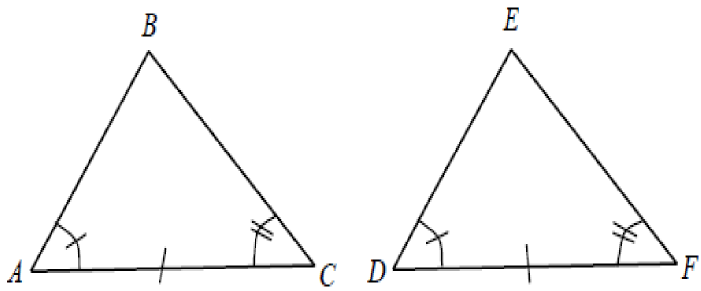


Gambar 6.8 Dua Buah Segitiga (S-Sd-S) Yang Kongruen

Perhatikan gambar 6.8, dua sisi dan satu sudut dari kedua segitiga tersebut adalah kongruen yaitu, $AB \cong DE$, $\angle A \cong \angle D$, dan $AC \cong DF$, sehingga $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

***Postulat* 6. 2.** Setiap korespondensi Sd-S-Sd (sudut-sisi-sudut) adalah kongruen.

Perhatikan gambar 6.9, dua sisi dan satu sudut dari kedua segitiga tersebut adalah kongruen yaitu, $\angle A \cong \angle D$, dan $AC \cong DF$, $\angle C \cong \angle F$, sehingga $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



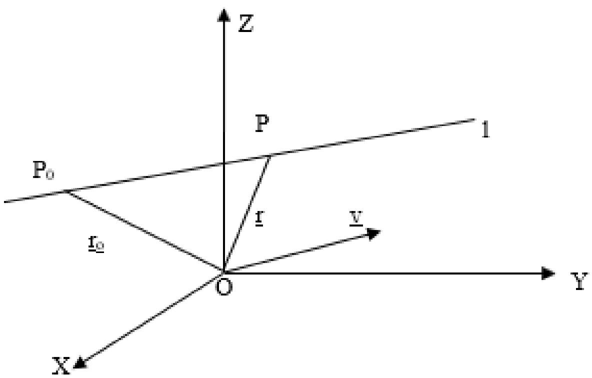
Gambar 6.9. Dua Buah Segitiga (Sd-S-Sd) Yang Kongruen

BAB VII

PERSAMAAN GARIS LURUS

A. Persamaan Garis Lurus

Pada gambar di bawah ini adalah garis yang melalui titik $P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan sejajar dengan vektor $\underline{v} = a\underline{i}+b\underline{j}+c\underline{k}$. Untuk menentukan persamaan garis *l*, diambil sembarang titik P(x,y,z) pada garis l.



Gambar 7.1. Menentukan Persamaan garis I

Garis *l*, maka $\overrightarrow{P_0P} \parallel \underline{v}$ dan $\overrightarrow{P_0P} = t\,\underline{v}$ dengan t bilangan real. Jika vektor-vektor posisi titik P_0 dan P terhadap 0 adalah $\underline{r}_0 = <x,y,z>$, maka $P_0P = \underline{r}-\underline{r}_0$ dan karena $\overrightarrow{P_0P} = t\,\underline{v}$ maka

$$\underline{r}-\underline{r}_0 = t\,\underline{v}$$
$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\,\underline{v}$$

Karena $\underline{r}$ adalah vektor posisi sebarang titik P pada garis l dan memenuhi persamaan terakhir, maka setiap titik P pada garis $l$akan memenuhi persamaan tersebut. Dengan kata lain, persamaan garis l yang melalui $P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan sejajar vektor $\underline{v}$ = <a,b,c> adalah

Atau $\langle x,y,z\rangle .= \langle x_0,y_0,z_0\rangle + t\langle a,b,c\rangle$

$\langle x,y,z\rangle .= \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc\rangle$

$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\underline{v}$

$x=x_0 + ta; y=y_0+ tb; z=z_0 + tc$

Persamaan parametrik (kanonik) dari garis l.

Apabila parameter t dari persamaan parametrik ini dihilangkan, maka diperoleh

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Disebut persamaan simetrik dari garis l dengan bilangan arah a,b,c dan melalui titik (x_0,y_0,z_0). Persamaan parametrik itu terdiri dari dua persamaan, yaitu

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad dan \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Contoh 1

Tentukan persamaan-persamaan vektor, parametrik dan simetrik untuk garis yang melalui titik a(3,-2,4) dan b(5,6,-2)

Jawab:

Sebuah vektor yang sejajar dengan garis ab adalah $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$ = <5-3,6-(-2),-2-4> = <2,8,-6> dipilih $\underline{r}_0 = \overrightarrow{OA}$= <3,-2,4> dan $\underline{r}$ sebarang vektor posisi titik (x,y,z), maka persamaan vektor garis AB adalah

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\,\underline{v}$$

$$\langle x,y,z\rangle = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle 2,8,-6\rangle$$

Persamaan parametriknya adalah

$$x=3+2t,\ y=-2+8t,\ z=4-6t$$

Sedangkan persamaan simetriknya adalah

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{8}=\frac{z-4}{-6}$$

Contoh 2

Tentukan persamaan simetrik dari garis potong bidang-bidang 2x – y-5z=-14 dan 4x+5y+4z=28.

Jawab:

Dari dua persamaan bidang kita hilangkan x, dan diperoleh y+2z=8. Jika dari dua persamaan bidang itu kita hilangkan y, maka diperoleh x= $\frac{3}{2}$ z -3. Dari dua persamaan ini dapat disusun persamaan simetriknya yaitu:

$$\frac{y-8}{-2}=z, \qquad \frac{x+3}{\frac{3}{2}}=z$$

$$\frac{x+3}{\frac{3}{2}}=\frac{y-8}{-4}=z, \qquad \text{atau}$$

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-8}{-4}=\frac{z}{2}$$

Hasil ini bukanlah satu-satunya persamaan dari garis potong kedua bidang itu.misalkan, jika yang dihilangkan x dan z mungkin akan memperoleh persamaan yang berbeda, namun bilangan arahnya akan sama dengan k<3,-4,2> dengan k suatu bilangan real.

Suatu penyelesaian lain didasarkan pada kenyataaan bahwa garis potong dua bidang tersebut akan tegak lurus pada vektor-vektor normalnya. Misalkan u=<2,-1,-5> adalah vektor normal bidang pertama dan v=<4,5,4> adalah vektor normal bidang kedua. Misalkan pula w = u x v, maka

$$\underline{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 21\underline{i} - 28\underline{j} + 14\underline{k}$$

Garis potong dua bidang itu sejajar dengan vector $\underline{w}$ ini selanjutnya dipilih suatu titik pada garis potong itu, misalkan (3,0,4) maka persamaan simetrik garis potong itu adalah

$$\frac{x-3}{21} = \frac{y}{-28} = \frac{y-4}{14}, \text{ atau}$$

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{y-4}{2}$$

Selanjutnya akan kita ambil lebih umum untuk memperoleh rumus persamaan garis lurus yang melalui titik a (x_1,y_1,z_1) dan titik b (x_2,y_2,z_2).

Vektor-vektor posisi titik-titik A dan B berturut-turut adalah $\underline{a} = \langle x_1,y_1,z_1\rangle$ dan $\underline{b} = \langle x_2,y_2,z_2\rangle$ dengan garis yang melalui A dan B. Ambil sebarang titik R(x,y,z) pada garis tersebut yang vector posisinya adalah $\underline{r} = \langle x,y,z\rangle$. Maka persamaan vector garis AB adalah

$\underline{r} = \underline{a} + t\,(b-a)$ dengan t bilangan real

$\langle x,y,z\rangle = \langle x_1,y_1,z_1\rangle + t\langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\rangle$

$x = x_1 + t(x_2-x_1),\ y = y_1 + t(y_2-y_1),\ z = z_1 + t(z_2-z_1)$

Adalah persamaan parametric garis AB.

Dengan melenyapkan parameter t dari persamaan parametric ini akan diperoleh persamaan simetrik dari garis ab sebagai berikut:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Contoh 3

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui A(3,2,1) dan B(5,-1,-2)

Jawab:

Persamaan garis lurus yang melalui A dan B adalah:

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-2}{-1-2}=\frac{z-1}{-2-1}$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-3}$$

B. Letak Garis Lurus terhadap Bidang Datar

Ada tiga kemungkinan yang terjadi, letak suatu garis terhadap suatu bidang datar, yaitu garis memotong bidang, garis sejajar bidang dan garis terletak pada bidang.

Perhatikan sebuah garis *l*= $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$

Dan sebuah bidang α:Ax + By + Cz + D = 0

Misalkan garis dan bidang ini berpotongan, maka koordinat titik potongnyadicaridengan menyelesaikan x,y, dan z dari tiga persamaan itu. Salah satu cara menyelesaikannya dengan memisalkan bahwa

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}=t$$

x = x_1 + at, y = y_1+ bt, z = z_1+ ct disubstitusikan pada persamaan bidang, maka diperoleh

A(x_1 + at) + B (y_1+ bt) + C (z_1+ct) + D = 0

(Aa + Bb + Cc) t + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0

ApabilaAa + Bb + Cc ≠ 0, maka kita akan memperoleh nilai t, sehingga koordinat titik potong garis dan bidang diperoleh dengan mensubstitusikan nilai t kedalam persamaan garis yang memuat t.

JikaAx_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 danAa + Bb + Cc ≠ 0 maka titik potong garis dan bidang itu adalah (x_1 ,y_1,z_1).

Jika Aa + Bb + Cc = 0 dan Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D≠ 0 maka garis dan bidang adalah sejajar.

Jika Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 danAa + Bb + Cc = 0 maka garis terletak pada bidang.

Garis *l* tegak lurus bidang α, apabila vector arah garis *l* sejajar dengan vektor normal bidang α. Vektor arah garis *l* adalah m = <a,b,c> dan vektor normal bidang α adalah n = <A,B,C>

Maka garis *l* tegak lurus bidang α, apabila m = kn dengan k suatu bilangan real.

Contoh 4

Tentukan persamaan garis yang melalui titik P(3,5,2) dan tegak lurus bidang
α: 2x – 3y + z = 6

Jawab:
Vektor normal bidang α adalahn= <2.-3,1>.
Persamaan garis yang melalui titik P(3,5,2) dan tegak lurus bidang α sama saja dengan persamaan garis melalui P dan sejajar dengan vector n, yaitu:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{1}$$

Contoh 5

Tunjukkan bahwa garis x = -2-2t, y = -1 + t, z = 7 + t terletak pada bidang
2x + 3y + z = 0.

Jawab:
Garis terletak pada bidang, apabila mempunyai titik potong dan vektor arah garis tegak lurus dengan vector normal bidang.

Pilih sebuah titik pada garis, misalnya dengan mengambil t = 0 yaitu (-2,-1,7). Titik ini memenuhi persamaan bidang, maka (-2,-1,7) pada bidang.

Vector arah garis adalah m= <-2,1,1>dan vector normal bidang adalah n= <2,3,1>

Karena m .n= <-2,1,1> . <2,3,1> = -4 + 3 + 1 = 0 maka m⊥n, yaitu garis sejajar bidang. Jadi garis terletak pada bidang.

Contoh 6

Carilah persamaan bidang yang memuat garis x = 1+2t, y = -1+3t, z = 4+t dan titik (1,-1,5).

Jawab:

Ambil dua titik pada garis dengan cara member harga t, missal t = 0 dan t = 1 akan diperoleh titik-titik (1,-1,4) dan (3,2,5). Selanjutnya persamaan bidang yang dicari adalah persamaan bidang yang melalui titik-titik (1,-1,5), (1,-1,4), dan (3,2,5) yaitu:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x - 2y - 5 = 0$$

Penyelesaian cara lain yaitu dengan menggunakan vector arah garis, yaitu m <2,3,1>dan sebuah titik (1,-1,4) pada garis serta titik (1,-1,5) yang diketahui. Dua titik ini menentukan vector u =<0,0,1>.

Vektor normal bidang yang dicariadalah:

$$m \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3i - 2j$$

Maka persamaan bidang yang dicari adalah

3(x–1) – 2(y+1) = 0

3x – 2y – 5 = 0

Letak dua garis lurus dalam ruang dimensi tiga. Dua buah garis lurus dalam ruang kemungkinan akan berpotongan, sejajar, berimpit atau bersilangan.

Misalkan diketahui dua garis berikut ini

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \text{ dan } \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

Sudut antara dua garis ini sama dengan sudut yang dibentuk oleh vektor-vektor arahnya, yaitu $\underline{m}_1=<a_1,b_1,c_1>$ dan $\underline{m}_2<a_2,b_2,c_2>$.

Jika θ adalah sudut yang dibentuk oleh dua garis tersebut, maka

$$\text{Cos}\,\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2}+\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2}}$$

Dua garis akan sejajar, apabila vektor-vektor arahnya sejajar, yaitu $\underline{m}_1=t\underline{m}_2$ dengan t suatu bilangan real $<a_1,b_1,c_1>=t<a_2,b_2,c_2>$ atau

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

Dua garis saling tegak lurus, apabila vektor-vektor arahnya saling tegak lurus, yaitu

$$\underline{m}_1\cdot\underline{m}_2=0$$

$$<a_1,b_1,c_1>\,.\,<a_2,b_2,c_2>=0$$

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

Dua garis akan berpotongan, apabila ada penyelesaian untuk x,y,z dari empat persamaaan bidang yang menyatakan dua persamaan garis itu.

Contoh 7

Tunjukkan bahwa garis-garis

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{-2} \text{ dan } \frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{6}$$

Berpotongan dan carilah persamaan bidang yang memuat dua garis itu.

Jawab:
Kita misalkan bahwa

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{-2}=t \text{ dan } \frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{6}=k$$

Atau x=1–4t, y = 2+ 3t, z = 4–2t dan
x=2-k, y = 1 + k, z = -2 + 6k

Maka diperoleh persamaan
1- 4t = 2-k, 2 + 3t = 1+k dan 4–2t = -2 + 6k
Dari k = 4t + 1, k = 3t + 1 diperoleh t = 0 dan k = 1

Yang memenuhi pada persamaan 4–2t = -2 + 6k.
Jadi titik potongnya adalah (1,2,4)

Untuk mencari persamaan bidang yang memuat dua garis itu ditentukan vektor normalnya dulu, yaitu dengan perkalian silang dari vektor-vektor arah garis, yaitu $\underline{m}_1$ = <- 4, 3, -2> dan $\underline{m}_2$ = <-1, 1, 6>

Vektor normal bidang adalah $\underline{n}=\underline{m}_1 x \underline{m}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

$\underline{N}$ = 20i + 26j–k

Jadi persamaan bidang yang dicari adalah persamaan bidang yang melalui titik (1,2,4) dan tegak lurus $\underline{n}$, yaitu:

$$20\,(x-1) + 26\,(y-2)-(z-4)=0$$
$$20x + 26y - z = 68$$

Kita telah mengetahui bahwa garis dengan persamaan $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$, mempunyai bilangan-bilangan arah a,b,c (urutan diperhatikan) atau mempunyai vektor arah $\underline{m}$ = < a, b, c >.

Kita sekarang akan menentukan bilangan-bilangan arah dari garis ini diubah ke dalam persamaan simetrik (kanonik), misalnya menghilangkan x, kemudian menghilangkan y dari dua persamaan bidang itu seperti *contoh 2*

Dengan menghilangkan x didapat

$$(A_2B_1 - A_1B_2)y + (A_2C_1 - A_1C_2)z + (A_2D_1 - A_1D_2) = 0$$

Dengan menghilangkan y didapat

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + (B_2C_1 - B_1C_2)z + (B_2D_1 - B_1D_2) = 0$$

Dari dua persamaan ini diperoleh

$$\frac{x - \frac{B_1D_2 - B_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - \frac{A_1D - A_2D_1}{A_2B_1 - A_1B_2}}{A_2C_1 - A_1C_2} = \frac{z}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Nampak bahwa bilangan – bilangan arah (vector arah) dari garis tersebut adalah

$\underline{m}$= <$B_1C_2 - B_2C_1, A_2C_1 - A_1C_2, A_1B_2 - A_2B_1$>

Atau dalam bentuk determinan menjadi

$\underline{m}$ = <$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$>

Contoh 8

Tentukanlah vector arah (bilangan – bilanganarah) dari garis potong bidang – bidang

$2x - y + 3z - 5 = 0$ dan $x + 2y - z + 7 = 0$

Jawab:

Kita gunakan rumus tersebut, maka vector garis tersebut adalah

$\underline{m}$ = <$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$> atau

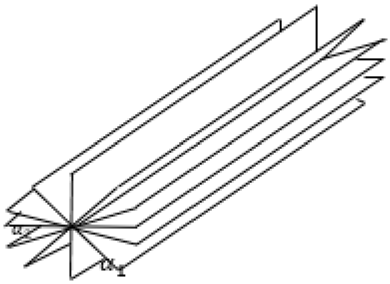
$\underline{m}$ = <-5,5,5> = 5<-1,1,1>

Misalnya diketahui sebuah bidang

α_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ dan α_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Persamaan:

$\alpha_1 + t\alpha_2 = 0$ dengan -~ < t < ~ disebut *berkas bidang* (lihat gambar)



Gambar 7.2. Berkas bidang $\alpha_1 + t\alpha_2 = 0$ dengan -~ < t < ~

Contoh 9

Tentukanlah persamaan bidang yang melalui titik P(3,2,1) dan garis potong bidang x+y- 2z+2= 0 dan 3x – y+z – 6=0

Jawab:

Dibentuk berkas bidang

$(x + y - 2z + 2) + t\,(3x - y + z - 6) = 0$

Dipilih bidang, dari berkas bidang ini yang melalui titik P(3,2,1), maka koordinat titik ini disubstitusikan pada persamaan berkas bidang, diperoleh:

$(3 + 1 - 4 + 2) + t\,(9 - 1 + 2 - 6) = 0$

t=-1/2

Jadi persamaan bidang yang dicari adalah

$(x + y - 2z + 2) - \frac{1}{2}(3x - y + z - 6) = 0$

$-\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y - 1\frac{1}{2}z + 5 = 0$

$x - 3y + 3z - 10 = 0$

Contoh 10

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus bidang 3x + 6y – 7z – 25 = 0 dan memotong sumbu x dan memotong pula garis x – y – 1= 2x + z – 7 = 0.

Jawab:

Persamaan sumbu x adalah y=z=0. Garis yang berpotongan dengan sumbu x dan garis x – y – 1= 2x +z – 7 = 0. Adalah anggota berkas berikut ini.

$$\begin{cases} y + tz = 0 \\ (x - y - 1) + k(2x + z - 7) = 0 \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{cases} y + tz = 0 \\ (1 + 2k)x - y + kz - 1 - 7k = 0 \end{cases}$$

Vektor arah garis ini adalah:

$\underline{m} = \left\langle \begin{vmatrix} 1 & t \\ -1 & k \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & t \\ 1+2k & k \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1+2k & -1 \end{vmatrix} \right\rangle$ atau $\underline{m}$ = <k+t, t+2kt, -1 – 2k>

Vektor normal dari bidang 3x + 6y – 7z – 25 = 0 adalah $\underline{n}$ = <3, 6, -7>
Garis yang dicari harus tegak lurus dengan bidang 3x+6y – 7z – 25 = 0, maka $\underline{m}$ harus sejajar dengan $\underline{n}$. Diambil $\underline{m}$ = $\underline{n}$, maka

<k + t, t + 2kt, -1 – 2k > = <3,6,-7>

Kita memperoleh k = 3 dan t = 0 atau k = 3 dan t = 6/7

Untuk k=3 dan t=0 didapat persamaan garis yang dicari adalah y = 0, 7x – y + 3z – 22 = 0.

Untuk k=3 dan t=6/7 didapat persamaan garis yang dicari adalah 7y+6z=0, 49x – 7y+6z – 49=0

Jarak dua garis yang bersilangan

Misalkan diketahui dua garis g_1 dan g_2 ditentukan dengan cara berikut ini. Buat bidang α melalui garis g_2 dan sejajar garis g_1. Pilih suatu titik pada garis g_1. Maka jarak garis g_1 dan g_2 adalah jarak titik P ke bidang α.

Contoh 11

Berapakah jarak garis g_1: 7x + 4z – 38 = 0
7y – 5z + 37 = 0 dan garis g_2: 7x + 8z – 16 = 0
7y – 3z = 15

Jawab:

Persamaan bidang yang melalui garis g_1 adalah anggota berkas bidang $(7x + 4z - 38) + t(7y - 5z + 37) = 0$ atau $7x + 7ty + (4 - 5t)z - 38 + 37t = 0$.

Vektor normal bidang ini adalah $\underline{n} = <7,7t,4-5t>$.

Sedangkan vektor arah garis g_1 adalah

$$\underline{m} = \left\langle \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \right\rangle = < -56,21,49 >$$

Bidang yang melalui g_1 sejajar g_2, maka harus dipenuhi

$\underline{m} \perp \underline{n}$, yaitu $\underline{m}.\underline{n} = 0$

$< -56,21,49 >, < 7, 7t, 4 - 5t > = 0$

$-8 + 3t + 4 - 5t = 0$

$t = -2$

Jadi bidang yang melalui g_1 dan sejajar g_2 adalah $7x - 14y + 14z - 112 = 0$ yang disederhanakan menjadi $x - 2y + 2y - 16 = 0$

Pilih titk P(0,3,2) pada garis g_2, maka jarak P ke bidang $x - 2y + 2y - 16 = 0$ adalah

$$d = \frac{0 - 2.3 + 2.2 - 16}{\sqrt{1+4+4}} = 6$$

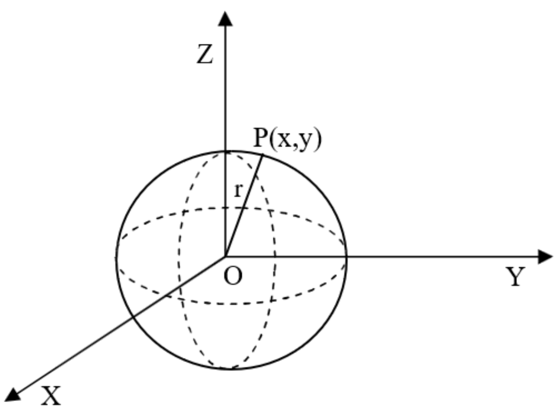
Jadi jarak garis-garis g_1 dan g_2 adalah 6

BAB VIII

PERSAMAAN BOLA

Bola dengan pusat titik O (titik asal) dan berjari-jari r, persamaannya diperoleh dengan cara mengambil sebarang titik P(x, y, z) pada bola. Sehingga

$$\overrightarrow{OP} = \underline{r} = (x, y, z).$$



Gambar 8.1. Bola dengan Titik Pusat 0 dan Berjari jari r

Pada gambar diatas

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ jari-jarinya } r = |\underline{r}|$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Karena P(x, y, z) sebarang titik pada bola, maka setiap titik (x, y, z) pada bola berlaku $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Ini berarti persamaan bola dengan pusat O dan berjari- jari r adalah:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Selanjutnya akan dicari persamaan bola dengan jari-jari r dan titik pusat

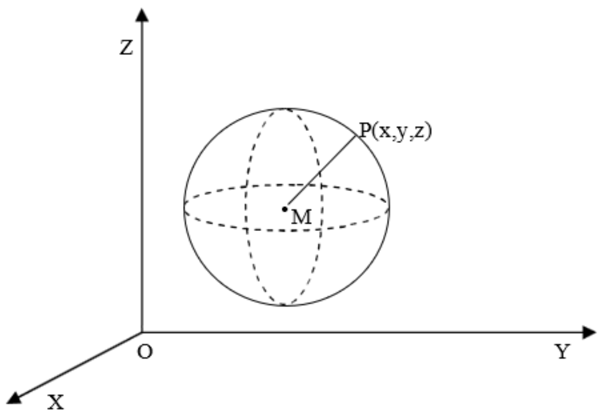
M (a, b, c).

Ambil sebarang titik P(x, y, z) pada bola, maka vektor

$$\overrightarrow{PM} = \underline{r} = (x - a,\ y - b,\ z - c).$$

$$\left|\overrightarrow{PM}\right|^2 = |\underline{r}|^2 = \underline{r.r} = (x - a, y - b, z - c).\ (x - a, y - b, z - c).$$

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$



Gambar 8.2. Bola dengan Jari-jari r dan Titik Pusat M (a, b, c).

Karena P(x, y, z) sebarang titik pada bola yamg memenuhi persamaan tersebut diatas, maka setiap titik (x, y, z) pada bola memenuhi persamaan tersebut. Hal ini berarti persamaan bola dengan jari-jari r dan titik pusat (a, b, c) adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Contoh 1

Carilah persamaan bola yang berpusat di titik (1, 3, 2) dan melalui titik (2, 5, 0).

Jawab

Jari-jari bola adalah jarak dua titik tersebut, yaitu

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (5-3)^2 + (-2)^2} = 3.$$

Persamaan bola yang dicari adalah persamaan bola dengan jari-jari 3 berpusat di titik (1, 3, 2), yaitu:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$$

Jika dijabarkan menjadi $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 5 = 0$.

Rumus persamaan bola yaitu $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ dapat ditulis sebagai berikut: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$

Jika $-2a = A$, $-2b = B$, $-2c = C$, dan $a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = D$, maka persamaan bola tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Nampak disini bahwa persamaan bola adalah suatu persamaan kuadrat dalam x, y, dan z dengan ciri-ciri: (a) tidak memuat suku-suku xy, xz, atau yz, dan (b) koefisien-koefisien x^2, y^2, dan z^2 selalu sama.

Selanjutnya akan ditentukan titik pusat dan jari-jari dari bola dengan persamaan

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0.$$

Persamaan ini bisa diubah dengan melengkapi kuadrat dari x, y, dan z sebagai berikut:

$$(x + \frac{1}{2}A)^2 + (y + \frac{1}{2}B)^2 + (z + \frac{1}{2}C)^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2 - D.$$

Dari persamaan ini dapat dengan mudah ditentukan titik pusat dan jari-jari bola, yaitu:

$M(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B,-\frac{1}{2}C)$ sebagai titik pusatnya, dan

$r=\sqrt{\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2+\frac{1}{4}C^2-D}$ adalah jari – jarinya

Contoh 2

Tentukan pusat dan jari-jari bola, jika diketahui persamaan bola tersebut adalah sebagai berikut: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 12z + 68 = 0$.

Jawab

Dengan proses melengkapkan kuadrat, persamaan bola diubah menjadi:

$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) + (z^2 - 12z + 36)$
$= 25 + 16 + 36 - 68$ $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 9$

Ini berarti bola berpusat di titik (5, 4, 6) dengan jari-jari 3.

Soal diatas dapat juga diselesaikan dengan menggunakan rumus, sehingga diperoleh:

Titik pusat bola $M(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B,-\frac{1}{2}C)= M(-\frac{1}{2}(-10),-\frac{1}{2}(-8),-\frac{1}{2}(-12)) = (5, 4, 6)$

Jari-jari bola adalah r = $r=\sqrt{\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2+\frac{1}{4}C^2-D}$

$$r=\sqrt{\frac{1}{4}(-10)^2+\frac{1}{4}(-8)^2+\frac{1}{4}(-12)^2-68}$$

$$r=\sqrt{25+16+36-68}$$

$$r=\sqrt{9}=3$$

A. Bidang Singgung Pada Bola

Misalkan bola dengan persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$; dan suatu titik $T(x_1, y_1, z_1)$ pada bola. Akan dicari persamaan bidang singgung pada bola di titik $T(x_1, y_1, z_1)$. Bidang singgung di titik T dan jari-jari bola melalui T saling tegak lurus, ambil sebarang titik $V(x, y, z)$ pada bidang singgung, maka

$\overrightarrow{TV} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle$ pada bidang singgung

Pusat bola adalah P(a, b, c), maka

$$\overrightarrow{PT} = (x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c)$$

Karena $\overrightarrow{TV} \perp \overrightarrow{PT}$ $maka$ $\overrightarrow{PT}.\overrightarrow{TV} = 0$

$$PT.(PT - PV) = 0$$

$$\overrightarrow{PT}.\overrightarrow{PT} - PT.PV = 0$$

$r^2 - \langle x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c\rangle . \langle x - a, y - b,$

$z - c\rangle = 0$ $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) + (z_1 - c)(z - c) = r^2.$

Ini adalah persamaan bidang singgung bola dengan persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$; di titik $T(x_1, y_1, z_1)$ pada bola.

Contoh 3

Tentukan persamaan bidang singgung pada bola $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ di titik (1, 3, 3).

Jawab

Titik (1, 3, 3) terletak pada bola, sebab koordinat-koordinatnya memenuhi pada persamaan bola. Maka persamaan bidang singgung pada bola di titik (1, 3, 3) adalah:

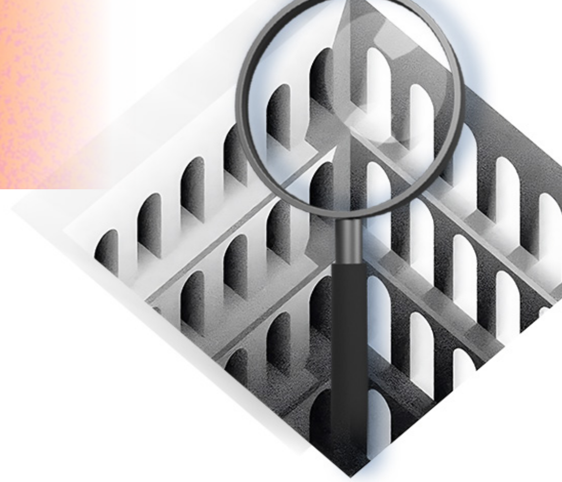
$(1 - 3)(x - 3) + (3 - 1)(y - 1) + (3 - 2)(z - 2) = 9.$

$-2x + 2y + z - 7 = 0.$

Soal soal Latihan

1. Tuliskan persamaan bola yang pusatnya di titik (-6, 2, -3) dan jari-jarinya 2.

2. Carilah persamaan bola yang berpusat di titik (2, 4, 5) dan menyinggung bidang xy.
3. Carilah persamaan bola jika diameternya adalah ruas garis yang menghubungkan titik (-2, 3, 7) dan (4, -1, 5).
4. Tentukanlah pusat dan jari-jari bola dengan persamaan:
   $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y + 16z - 13 = 0$.
5. Carilah persamaan bola-bola yang bersinggungan yang titik-titik pusatnya berturut-turut (-3, 1, 2) dan (5, -3, 6) dan jari-jarinya sama.
6. Carilah persamaan bola dalam kuadran pertama yang jari-jarinya 6 dan menyinggung bidang-bidang koordinat.
7. Carilah persamaan bola dengan pusat (1, 1, 4) dan menyinggung bidang
   $x + y = 12$.
8. Tentukan persamaan bola yang melalui titik-titik (3, 1, -3), (-2, 4, 1), dan (-5, 0, 0) yang titik pusatnya terletak pada bidang $2x + y - z + 3 = 0$.
9. Tentukan persamaan bola yang berjari-jari 3 dan menyinggung bidang
   $x + 2y + 3z + 3 = 0$ di titik T(1, 1, -3).
10. Tentukan persamaan bidang singgung pada bola
   $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ yang sejajar dengan bidang
   $4x + 3z - 17 = 0$.



BAB IX

LUASAN PUTARAN

Misalkan sumbu x diambil sebagai sumbu putar dan kurva yang diputar terletak pada bidang YOZ. Persamaan kurva yang diputar adalah

$$\begin{cases} x = 0 \\ f(y, z) = 0 \end{cases}$$

Selanjutnya diambil $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada kurva. Maka dipenuhi: $x_o = 0$ dan $f(y_o, z_o) = 0$.

Ambil $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada kurva.

Maka dipenuhi $x_0 = 0$

$$\begin{cases} \\ f(y_0, z_0 = 0 \end{cases}$$

Lingkaran yang dilalui T adalah perpotongan bidang yang melalui T dan tegak lurus sumbu putar, yaitu sumbu dengan bola yang pusatnya pada sumbu x, misalkan titik O dan jari-jarinya OT.

Jadi persaamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$x = x_o$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$$

Selanjutnya dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o sehingga diperoleh persamaan luasan putarannya. Berikut ini akan dicari bermacam-macam persamaan luasan putaran.

A. Suatu Ellips Pada Bidang XOY Diputar Mengelilingi Sumbu X

Persamaan ellips pada bidang XOY berbentuk

ìï $z = 0$

í $x2 + y2 =$

ïî a^2 b^2 1

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada ellips. Maka harus dipenuhi $z_o = 0$

Persamaan bidang yang melalui T dan tegak lurus sumbu x adalah $x = x_0$.

Persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

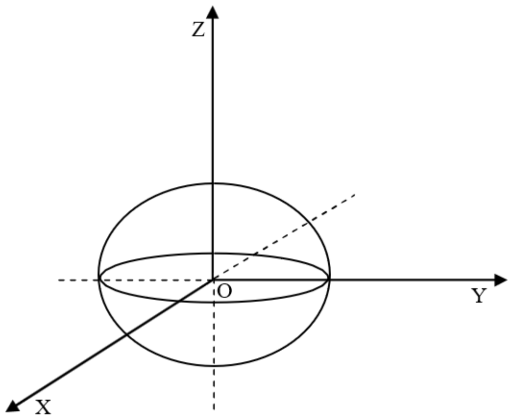
$$x = x_0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} \; . \; \frac{y^2 + z^2}{b^2} \quad 1$$

Persamaan ini merupakan persamaan ellipsoida putaran dengan sumbu putar sumbu x.



Gambar 9.1. Persamaan Ellipsoida dengan Sumbu Putar X

Jika sumbu putarnya sumbu y maka persamaan ellipsoida diperoleh sebagai berikut.

Persamaan ellips yang diputar adalah

$$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada ellips.

Persamaan bidang yang melalui T dan tegak lurus sumbu y adalah $y = y_0$.

Persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$y = y_o$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$$

Dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Persamaan ini merupakan persamaan ellipsoida putaran dengan sumbu putar sumbu y.

Titik–titik puncaknya adalah (a, 0, 0), (-a, 0, 0), (0, b, 0), (0, -b, 0), (0, 0, a), dan (0, 0, a).

B. Suatu Parabola Pada Bidang XOY Diputar Mengelilingi Sumbu X

Persamaan parabola pada bidang XOY berbentuk:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada parabola.
Maka harus dipenuhi

$$z_o = 0$$

$$y_o^2 = 2px_o$$

Persamaan lingkaran yang ilalui T adalah

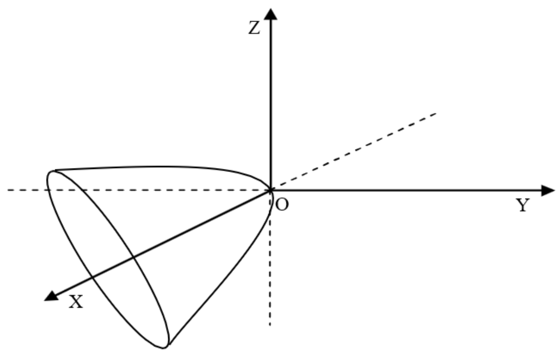
$$x = x_o$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$$

Dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan

$y^2 + z^2 = 2px$.

Persamaan ini merupakan persamaan paraboloida putaran dengan sumbu putar sumbu x.



Gambar 9.2. Suatu Hiperbola Pada Bidang XOY Diputar Mengelilingi Sumbu X

Persamaan hiperbola pada bidang XOY berbentuk

$$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada hiperbola. Maka harus dipenuhi $z_o = 0$

Persamaan bidang yang melalui T dan tegak lurus sumbu x adalah $x = x_0$.

Persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah $x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$

Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$x = x_o$$

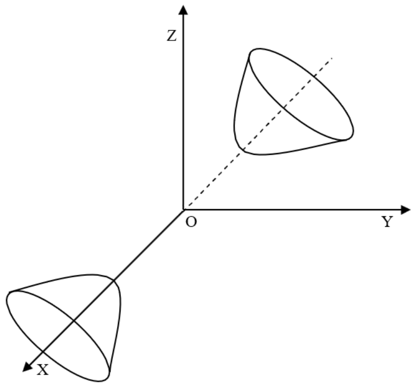
$$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$$

Dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

Persamaan ini merupakan persamaan hiperboloida putaran berdaun dua dengan sumbu putar sumbu x.

Titik puncaknya ada dua yaitu (-a, 0, 0) dan (a, 0, 0).



Gambar 9.3. Putaran Hiperboloida Berdaun Dua dengan Sumbu Putar Sumbu X.

Jika hiperbola pada bidang XOY tersebut diputar mengelilingi sumbu y maka diperoleh persamaan luasan sebagai berikut.
Persamaan hiperbola pada bidang XOY berbentuk

$$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada hiperbola. Maka harus dipenuhi

$$z_o = 0$$

$$\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} = 1$$

Persamaan bidang yang melalui T dan tegak lurus sumbu y adalah $y = y_0$.
Persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah
$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$
Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$y = y_o$$

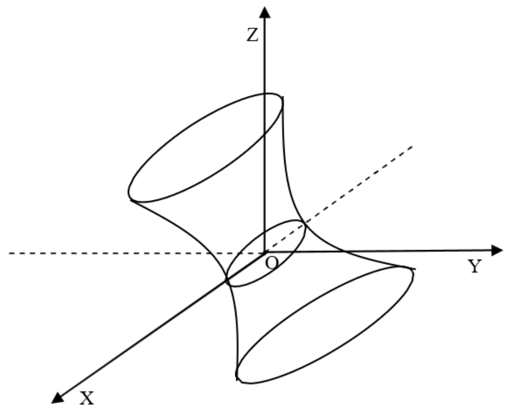
$$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$$

Dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1$$

Persamaan ini merupakan persamaan hiperboloida putaran berdaun satu dengan sumbu putar sumbu y.

Beberapa titik puncaknya adalah (a, 0, 0), (-a, 0, 0), (0, 0, a), dan (0, 0, -a).



Gambar 9.4. Putaran Hiperboloida Berdaun Satu dengan Sumbu Putar Sumbu Y.

C. Suatu Garis Lurus Pada Bidang XOY Diputar Mengelilingi Sumbu X

1. Misalkan persamaan garis yang diputar adalah

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = my + p \end{cases}$$

Misalkan T(x_o, y_o, z_o) sebarang titik pada garis yang diputar. Maka harus dipenuhi

$z_o = 0$

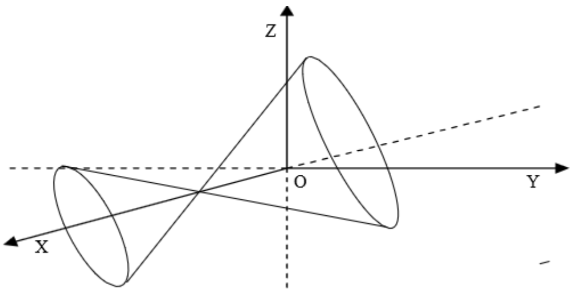
$x_o = my_o + p$

Persamaan bidang yang melalui T dan tegak lurus sumbu x adalah

$x = x_0$.

Persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah

$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^{\ 2} + y_o^{\ 2} + z_o^{\ 2}$



Gambar 9.5. Garis yang Diputar Mengelilingi Sumbu X

Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$x = x_o$

$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^{\ 2} + y_o^{\ 2} + z_o^{\ 2}$

Dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan $x^2 - m^2(y^2 + z^2) - 2px + p^2 = 0$.

Persamaan ini merupakan persamaan kerucut.

2. Misalkan garis yang diputar menyilang sumbu x, maka persamaannya berbentuk

$$\begin{cases} z = k \\ x = my + p \end{cases}$$

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada garis yang diputar. Maka harus dipenuhi

$z_o = k$

$x_o = my_o + p$

Persamaan bidang yang melalui T dan tegak lurus sumbu x adalah $x = x_0$.

Persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah $x^2 + y^2 + z^2 = x\ ^2 + y\ ^2 + z\ ^2$

Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

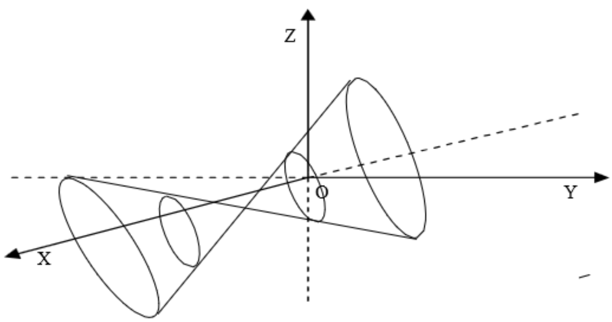
$x = x_o$

$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^{\ 2} + y_o^{\ 2} + z_o^{\ 2}$

Dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan

$$\frac{y^2 + z^2}{k^2} - \frac{(x-p)^2}{m^2 k^2} = 1$$

Persamaan ini merupakan persamaan hiperboloida putaran berdaun satu.



Gambar 9.6. Putaran Hiperboloida Berdaun Satu

D. Suatu Lingkaran Pada Bidang XOY Diputar Mengelilingi Sumbu X

Misalkan persamaan lingkaran pada bidang XOY berbentuk

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada garis yang diputar.

Persamaan bidang yang melalui T dan tegak lurus sumbu x adalah $x = x_0$.

Persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah $x^2 + y^2 + z^2 = x_o^{\ 2} + y_o^{\ 2} + z_o^{\ 2}$

Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

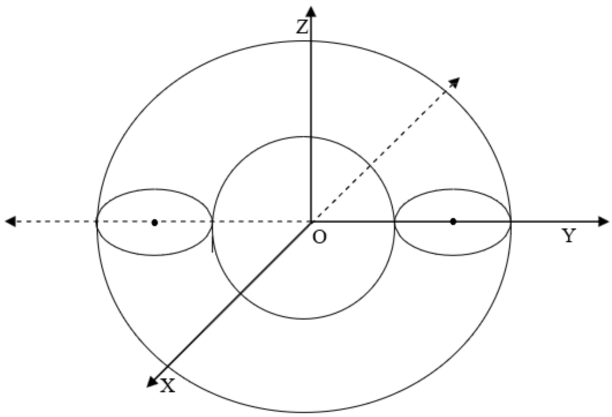
$x = x_o$

$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^{\ 2} + y_o^{\ 2} + z_o^{\ 2}$

Dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan

$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - b^2)^2 = 4b^2(r^2 - x^2)$.

Persamaan ini merupakan persamaan torus.



Gambar 9.7. Lingkaran Pada Bidang XOY Diputar Mengelilingi Sumbu X

E. Luasan Putaran Dengan Sumbu Putar Garis Sebarang

Misalkan persamaan sumbu putarnya adalah

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

dan persamaan kurva yang diputar adalah

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada kurva yang diputar.

Lingkaran yang dilalui T adalah perpotongan bidang melalui T dan tegak lurus sumbu putar dengan bola yang pusatnya di titik P yang terletak pada sumbu putar dan berjari-jari PT. Di sini dapat diambil $P(x_1, y_1, z_1)$.

Persamaan bidang melalui T dan tegak lurus sumbu putar adalah $a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$.

Persamaan bola yang pusatnya di titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan berjari-jari PT adalah

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 + (z_o - z_1)^2$

Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$\begin{cases} a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 + (z_o - z_1)^2 \end{cases}$$

Dengan mengeleminasi x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan luasan putaran.

Contoh 1

Tentukan persamaan luasan yang terjadi dari perputaran parabola $\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ mengelilingi garis $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$

Jawab

Persamaan sumbu putar adalah $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$

Vektor arah dari sumbu putar ini adalah $\underline{m}$ = <-1, 0, -2>.

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada parabola.

Maka harus dipenuhi

$z_o = 0$

$y^{\ 2} = 4x_o$

Persamaan bidang yang melalui T dan tegak lurus sumbu putar adalah

$-1(x - x_o) + 0(y - y_o) - 2(z - z_o) = 0$

atau $x + 2z = x_o + 2z_o$

Persamaan bola yang pusatnya di titik P(0, 0, 1) dan berjari-jari PT = $\sqrt{x_o^2 + y_o^2 + (z_o - 1)^2}$ adalah $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = x_o^{\ 2} + y_o^{\ 2} + (z_o - 1)^2$.

Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$x + 2z = x_o + 2z_o$

$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = x_o^2 + y_o^2 + (z_o - 1)^2$.

Selanjutnya didapat $x + 2z = x_o$.

Akibatnya $y_0^2 = 4_0x = 4(x + 2z) = 4x + 8z$.

Dengan mensubstitusikan x_o, y_o, dan z_o diperoleh

$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = (x + 2z)^2 + (4x + 8z) + 1$

Setelah dijabarkan dan disederhanakan, diperoleh persamaan luasan yaitu:

$Y^2 - 3z^2 - 4xz - 4x - 10z = 0$.

Contoh 2

Diketahui persamaan garis g = $\begin{cases} z = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

Tentukan persamaan luasan yang terbentuk dari garis g yang diputar mengelilingi sumbu x.

Jawab

Misalkan $T(x_o, y_o, z_o)$ sebarang titik pada garis g.

Maka harus dipenuhi $\begin{cases} z_o = 0 \\ y_o = 2x_o + 1 \end{cases}$

Persamaan bidang yang melalui titik T dan tegak lurus sumbu x adalah $x = x_o$.

Persamaan bola yang titik pusatnya di O dan melalui T adalah

$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$.

Jadi persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$x = x_o$

$x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$.

Kita mempunyai $y_o = 2x + 1$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan x_o, y_o, dan z_o diperoleh persamaan

$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (2x + 1)^2 + 0$.

Setelah dijabarkan dan disederhanakan diperoleh persamaan luasan yang ditanyakan yaitu:
$-4x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 1 = 0$.

Soal – soal Latihan

1. Suatu ellips dengan persamaan $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 4z^2 - 16 = 0 \end{cases}$ diputar mengelilingi sumbu x. Tentukan persamaan ellipsoida putaran yang terbentuk.
2. Suatu parabola dengan persamaan $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2z \end{cases}$ diputar mengelilingi garis $\begin{cases} z = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$. Tentukan persamaan luasan putaran yang terjadi.
3. Suatu garis $\begin{cases} y = 0 \\ x = z - 1 \end{cases}$ diputar mengelilingi garis dengan persamaan $\begin{cases} x = 0 \\ 2y = 3z - 3 \end{cases}$. Tentukan persamaan luasan putaran yang terjadi.

DAFTAR PUSTAKA

Anglin, W. S. Mathematics: A Concise History and Philosophy. New York: SpringerVerlag New York, Inc.

Bob Underhill (1981). Teaching Elementary School Mathematics. Toronto: Charles E. Merrill Publishing Company.

Clemens, Stanley, R.; O'Daffer, Phares ; Cooney, Thomas, J. (19994). Geometry. Canada: Publishing Addison/Wesley.

Walter Prenowitz, *Basic Concepts of Geometry,* Blaisdell Publishing Company, London

RIWAYAT PENULIS

Penulis 1:

Muda Sakti Raja Sihite, dilahirkan di Medan – Sumatera Utara pada tanggal 05 Juli 1979, anak ke 3 dari 5 bersaudara dari pasangan Ayah Drs.M.T.Sihite dan Ibu Dra.N. Sinambela, yang keduanya bekerja sebagai Dosen di Universitas Negeri Medan.

Riwayat Pendidikan Formal: Diawali dengan Pendidikan SD di SD Free Methodist Medan lulus tahun 1992, Pendidikan SMP di St. Thomas 3 Medan lulus tahun 1995, Pendidikan SMA di SMA Husni Thamrin Medan lulus tahun 1998.

Gelar Sarjana Teknik diperoleh dari Universitas Sumatera Utara (USU) tahun 2005, Menyelesaikan Pendidikan Pascasarjana (S2) di Universitas Negeri Medan (Unimed) pada Program Studi Pendidikan Matematika tahun 2012, dan pada tahun 2024 menyelesaikan Program Doktoral (S3) jurusan Pendidikan Dasar dengan konsentrasi Matematika di Universitas Negeri Medan.

Pada tahun 2007 , memulai karier sebagai Guru Matematika di salah satu SMA yang cukup terkenal di kota Medan. Dan pada tahun 2012 hingga saat ini bekerja sebagai Dosen Tetap Yayasan Universitas HKBP Nommensen Medan pada Program Studi Pendidikan Matematika, dan aktif juga hingga saat ini sebagai Guru bidang studi Matematika di salah satu SMA swasta di kota Medan. Penulis juga aktif dalam menulis beberapa Buku Ajar dan hasil penelitiannya dalam beberapa jurnal, baik dalam Jurnal Internasional bereputasi Scopus maupun dalam Jurnal Nasional Bereputasi Sinta.

Pada tahun 2011, menikah dengan Sihol Marito Situmorang, S.Psi, S.Pd yang bekerja sebgai Guru ASN di salah satu SMA Negeri di kota Medan dan memperoleh tiga orang anak yaitu : Amelia Stephanie Sihite, Eric Cornelius Sihite, dan Amira Septianie Manuela Sihite.

Penulis 2:

Lena Rosdiana Pangaribuan, dilahirkan di Medan – Sumatera Utara pada tanggal 02 Pebruari 1984, anak ke 5 dari 5 bersaudara dari pasangan Ayah Drs. R. Pangaribuan dan Ibu L. Harianja, yang keduanya bekerja sebagai Guru ASN.

Riwayat Pendidikan Formal: Diawali dengan Pendidikan SD di SD Swasta Methodist-3 Medan lulus tahun 1996, Pendidikan SMP di SMP Swasta Methodist-3 Medan lulus tahun 1999, Pendidikan SMA di SMA Negeri-3 Medan lulus tahun 2002.

Gelar Sarjana Pendidikan Matematika diperoleh dari Universitas Negeri Medan (Unimed) tahun 2007 , menyelesaikan Pendidikan Pascasarjana Program Magister (S2) di Universitas Sumatera Utara (USU) pada Program Studi Matematika tahun 2010 dan pada tahun 2023 kembali melanjutkan Pendidikan Pascasarjana Program Doktoral (S3) di Universitas Negeri Medan pada Program Studi Pendidikan Matematika.

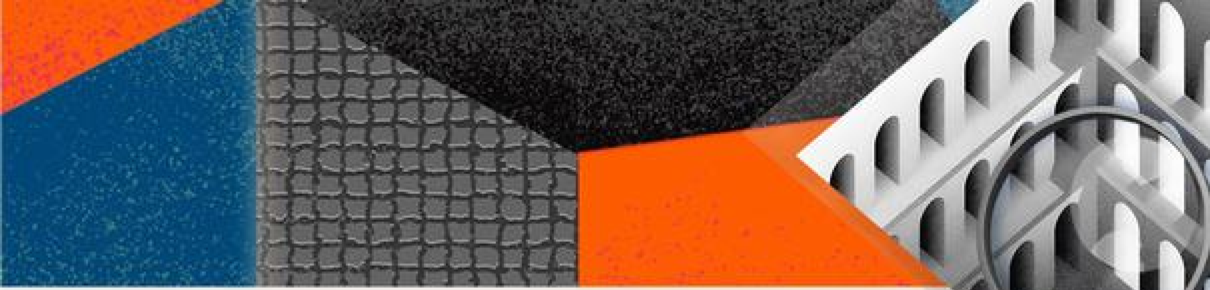
Pada tahun 2007, memulai karier sebagai Guru di salah satu sekolah yang cukup terkenal di kota Medan. Dan pada tahun 2012 hingga saat ini bekerja sebagai Dosen Tetap Yayasan Universitas HKBP Nommensen Medan pada Program Studi Pendidikan Matematika. Penulis juga aktif dalam menulis beberapa Buku Ajar bidang Matematika dan beberapa hasil penelitiannya dalam beberapa jurnal, baik dalam Jurnal Internasional bereputasi Scopus maupun dalam Jurnal Nasional Bereputasi Sinta.

Pada tahun 2014, menikah dengan Fredy Hasibuan, S.E. yang bekerja sebagai Karyawan Swasta di salah satu perusahaan swasta kota Medan dan mempunyai dua orang anak yaitu: Daniel Leroy Michael Hasibuan dan Ivana Gloria Hasibuan.

Penulis 3:

Binur Panjaitan, dilahirkan di Tapanuli Utara – Sumatera Utara pada tanggal 18 Juni 1966, anak ke 4 dari 7 bersaudara dari pasangan Ayah P. Panjaitan dan Ibu M. Siagian. Riwayat pendidikan Formal, SD Negeri Sitorang, lulus Tahun 1979, SMP Negeri Silaen, lulus pada Tahun 1982, SMA Negeri Porsea lulus pada Tahun1985. Menyelesaikan Program S1 dari IKIP Medan dengan gelar Dra. Tahun 1990, menyelesaikan Program S2 dari Universitas Negeri Surabaya dengan gelar M.Pd. Tahun 2000 dan menyelesaikan Program S3 dari Universitas Negeri Surabaya dengan gelar Dr. pada Tahun 2012. Penulis memperoleh jabatan fungsional Guru Besar pada tahun 2017. Saat ini penulis sebagai Direktur Pascasarjana di IAKN Tarutung.

Pada tahun 1993 menikah dengan Hotlan Purba, S.E., M.M., dikaruniai 4 orang anak, Septian Anderson, M.Pd., Septama Bina Pasca, Rebekha Wiwien Purba dan Vera Margaretha Purba.



GEOMETRI ANALITIK I

Geometri adalah sumber belajar yang dirancang untuk mengajarkan konsep-konsep dasar dan lanjutan geometri kepada siswa. Buku ini mencakup berbagai topik penting yang dibagi menjadi beberapa bab, masing-masing dengan fokus yang berbeda namun saling berkaitan.

Bab ini memperkenalkan definisi dasar dan istilah penting dalam geometri, seperti titik, garis, bidang, dan sudut. Pembaca diajak untuk memahami dasar-dasar geometri dan bagaimana konsep-konsep ini membentuk dasar untuk topik-topik yang lebih kompleks. Topik seperti teorema Pythagoras, segitiga siku-siku, dan konsep kesebangunan dan kekongruenan segitiga juga dibahas secara mendalam.

Buku ini dirancang dengan berbagai contoh soal, latihan, dan tugas untuk memperkuat pemahaman siswa. Ilustrasi dan gambar-gambar yang jelas juga disertakan untuk membantu visualisasi konsep-konsep yang dibahas. Dengan pendekatan yang sistematis dan komprehensif, buku pelajaran geometri ini bertujuan untuk membangun fondasi yang kuat dalam geometri dan mempersiapkan siswa untuk studi matematika yang lebih lanjut.

Penerbit litnus.

literasinusantaraofficial@gmail.com
www.penerbitlitnus.co.id
@litnuspenerbit
literasinusantara_
085755971589

Pendidikan +17

ISBN 978-623-114-944-2 (jil.1)

9 786231 149442